

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ОСРЕДНЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО УСЛОВИЯ ТЕКУЧЕСТИ НА ПРЕДСКАЗАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКОМ ДИСКЕ

Академик РАН Ф. В. Гречников¹, Я. А. Ерисов^{2,*}, С. Е. Александров³

Поступило 07.02.2019 г.

Исследуется влияние замены точного условия текучести на осредненное на распределение остаточных напряжений в тонком поломом диске, подверженном действию внешнего давления и последующей разгрузке. Постановка краевой задачи специально упрощена так, чтобы была возможность получить математически точное полуаналитическое решение, с помощью которого легко исследовать влияние осреднения условия текучести на напряжённое состояние, включая распределение остаточных напряжений. Принятое точное условие текучести осредняется с использованием нескольких общепринятых подходов. Сравнительный анализ распределения остаточных напряжений показывает значительное отклонение распределения остаточных напряжений, следующего из решений для осреднённых условий текучести, от точного распределения остаточных напряжений.

Ключевые слова: анизотропия, трансверсальная анизотропия, условие текучести, остаточные напряжения, краевая задача.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524863301-306>

Характерной особенностью листовых полуфабрикатов из алюминиевых, магниевых, титановых, бериллиевых и других сплавов является явно выраженная анизотропия механических свойств, в том числе пластическая анизотропия [1]. Наиболее часто встречающимся видом анизотропии является ортотропия с различными пределами текучести в направлениях трёх главных осей анизотропии. Для описания ортотропного листа большое распространение получило квадратичное условие текучести Хилла [2], которое в цилиндрической системе координат (r, θ, z) в главных напряжениях имеет вид

$$(G + H)\sigma_r^2 - 2H\sigma_r\sigma_\theta + (H + F)\sigma_\theta^2 = 1. \quad (1)$$

В общем случае это условие характеризуется шестью независимыми показателями анизотропии при известных главных осях анизотропии. Однако в рассматриваемом случае существенными являются только три показателя:

$$\begin{aligned} 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}, & 2G &= \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}, \\ 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где X, Y — пределы текучести при растяжении вдоль главных осей анизотропии в плоскости листа; Z — предел текучести в направлении толщины. Так как при испытаниях листовых материалов трудно определить точную величину предела текучести по толщине [2], то также широко применяются коэффициенты Лэнкфорда R , которые представляют собой отношение логарифмических деформаций по ширине и толщине образца при испытании на растяжение [3]. Показатели Хилла и коэффициенты Лэнкфорда связаны соотношениями [4]

$$F = \frac{R_0}{R_{90}(R_0 + 1)}, \quad G = \frac{1}{R_0 + 1}, \quad H = \frac{R_0}{R_0 + 1}, \quad (3)$$

где коэффициент R_0 соответствует направлению главной оси анизотропии, вдоль которой предел текучести равен X , а коэффициент R_{90} — главной оси анизотропии, вдоль которой предел текучести равен Y .

Для упрощения теоретических расчётов процессов деформирования часто принимается, что мате-

¹Самарский научный центр Российской Академии наук

²Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева

³Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

*E-mail: yaroslav.erisov@mail.ru

риал обладает трансверсальной анизотропией, т.е. считается, что его свойства одинаковы в различных направлениях плоскости листа. В этом случае используется осреднённый в плоскости листа коэффициент анизотропии \bar{R} . Существуют различные выражения для вычисления среднего значения коэффициента анизотропии [4–11], которые фактически являются частными случаями выражения [10, 11]

$$\bar{R} = \frac{R_0 + \sum_{i=1}^{n-2} 2R_{\Delta\alpha i} + R_{90}}{2(n-1)}, \quad (4)$$

где $\Delta\alpha$ — увеличение угла вырезки испытываемых образцов, n — количество испытаний. Из (4) очевидно, что среднее значение коэффициента анизотропии зависит от количества испытаний.

Зависимость свойств материала от направления влияет как на технологические процессы изготовления изделий [6], так и на их эксплуатационные характеристики. Например, остаточные напряжения, а значит и упругое пружинение, весьма чувствительны к пластической анизотропии [12, 13]. Поэтому представляет интерес установить влияние осреднения условия текучести на распределение остаточных напряжений. В публикуемой работе исследуется распределение остаточных напряжений в тонком полом диске, подверженном действию внешнего давления и последующей разгрузке. Предполагается, что главные оси анизотропии совпадают с координатными линиями цилиндрической системы координат (r, θ, z) , ось z которой совпадает с осью симметрии диска. Принимается, что нормальное напряжение вдоль оси z равно нулю (плосконапряжённое состояние). В этом случае решение не зависит от θ и может быть построено методом, развитым в [14]. С другой стороны, отличие выбранного распределения пластической анизотропии от более часто встречающегося распределения, когда главные оси анизотропии совпадают с осями некоторой декартовой системы координат, не имеет принципиального значения для целей настоящего исследования.

Рассмотрим полый тонкий диск внешнего радиуса b_0 и внутреннего радиуса a_0 под действием внешнего давления P . Внутренний радиус свободен от напряжений. Таким образом, краевые условия имеют вид: $\sigma_r = -P$ при $r = b_0$ и $\sigma_r = 0$ при $r = a_0$, где σ_r — радиальное напряжение. Введём безразмерный радиус отношением $\rho = r/b_0$. Тогда краевые условия примут вид

$$\sigma_r = -P \quad (5)$$

при $\rho = 1$ и

$$\sigma_r = 0 \quad (6)$$

при $\rho = a$, где $a = a_0/b_0$.

Как отмечено выше, краевая задача является осесимметричной. В частности, радиальное напряжение σ_r и окружное напряжение σ_θ являются главными. В этом случае единственное нетривиальное уравнение равновесия принимает форму

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0. \quad (7)$$

Уравнения (1) и (7) выполняются в пластической области. В упругой области материал подчиняется закону Гука. Решение такой упругопластической задачи представлено в [14]. Пусть ρ_c безразмерный радиус упругопластической границы. Рассматривается интервал изменения P , при котором $a \leq \rho_c \leq 1$. Чисто упругое решение имеет силу в области $\rho_c \leq \rho \leq 1$, пластические деформации возникают в области $a \leq \rho \leq \rho_c$. Общее решение в упругой области имеет вид

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_0} = \frac{A}{\rho^2} - B, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = -\frac{A}{\rho^2} - B, \quad (8)$$

где A и B — постоянные интегрирования; σ_0 — характерное напряжение, которое будет определено ниже. Из (8) и краевого условия (5) найдём

$$B = A + p, \quad (9)$$

где $p = P/\sigma_0$.

Если предел текучести в направлении радиальной координаты равен X , то в пластической области распределение напряжений представляется в параметрическом виде как [14]

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_A} = -\frac{2 \sin \psi}{\sqrt{4 - \eta^2}}, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_A} = -\eta_1 \left(\frac{\eta \sin \psi}{\sqrt{4 - \eta^2}} + \cos \psi \right), \quad (10)$$

где

$$\eta = 2HXY, \quad \eta_1 = Y/X, \quad \sigma_A = X. \quad (11)$$

Вспомогательная переменная ψ связана с безразмерным радиусом ρ соотношением

$$\ln \frac{\rho}{a} = \frac{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2}}{2[1+\eta_1(\eta_1-\eta)]} \psi + \frac{2-\eta\eta_1}{2[1+\eta_1(\eta_1-\eta)]} \times \times \ln \frac{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2}}{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2} \cos \psi - (2-\eta\eta_1) \sin \psi}. \quad (12)$$

Из этого уравнения видно, что $\rho = a$ при $\psi = 0$, и тогда из уравнения (10) следует выполнение краевого условия (6). Пусть $\psi = \psi_c$ при $\rho = \rho_c$ и $\sigma_0 = X$ в (8). Тогда из (8), (10), (12) и условия непрерывности напряжений σ_r и σ_θ при $\rho = \rho_c$ следует, что

$$A = \rho_c^2 \left[\frac{\eta_1}{2} \left(\frac{\eta \sin \psi_c}{\sqrt{4-\eta^2}} + \cos \psi_c \right) - \frac{\sin \psi_c}{\sqrt{4-\eta^2}} \right],$$

$$B = -\frac{\sin \psi_c}{\sqrt{4-\eta^2}} - \frac{\eta_1}{2} \left(\frac{\eta \sin \psi_c}{\sqrt{4-\eta^2}} + \cos \psi_c \right),$$

$$\ln \frac{\rho_c}{a} = \frac{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2}}{2[1+\eta_1(\eta_1-\eta)]} \psi_c + \frac{2-\eta\eta_1}{2[1+\eta_1(\eta_1-\eta)]} \times \times \ln \frac{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2}}{\eta_1 \sqrt{4-\eta^2} \cos \psi_c - (2-\eta\eta_1) \sin \psi_c}. \quad (13)$$

При заданном значении ρ_c из интервала $a \leq \rho_c \leq 1$ уравнения (13) определяют ψ_c , A и B . Тогда давление, необходимое для возникновения пластической зоны радиусом ρ_c , вычисляется из (9). В частности, давление p_e , необходимое для возникновения пластической зоны, определяется при $\rho_c = a$, а давление p_p , при котором пластическая зона охватывает весь диск, при $\rho_c = 1$. Очевидно, что может быть решена и обратная задача. При задании давления p из интервала $p_e \leq p \leq p_p$ величины ρ_c , ψ_c , A и B находятся из решения системы уравнений (9) и (13).

Полученное общее решение имеет силу и в случае, если предел текучести в направлении радиальной координаты равен Y . В этом случае, однако, необходимо считать, что $\eta_1 = X/Y$ и $\sigma_A = Y$ в (10) и $\sigma_0 = Y$ в (8). Подчеркнём, что для сравнения двух решений они должны быть получены при одной и той величине P . При этом, значения величины p различаются вследствие разных значений σ_0 в двух решениях.

Критерий пластичности (1) запишем в осреднённом виде [4]:

$$\sigma_r^2 - \frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}} \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2. \quad (14)$$

Величина σ_s будет определена ниже. Критерий (14) удовлетворяется подстановкой

$$\frac{\sigma_r}{\sigma_s} = q_1 \sin \psi, \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_s} = q_2 \sin \psi - \cos \psi, \quad (15)$$

где

$$q_1 = \frac{2}{\sqrt{4-q^2}}, \quad q_2 = \frac{q}{\sqrt{4-q^2}}, \quad q = \frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}}.$$

Подставляя (15) в уравнение равновесия (7) и интегрируя при краевом условии (6), получим

$$\ln \frac{\rho}{a} = -\frac{q_1}{1+(q_1-q_2)^2} \times \times \left\{ \psi + (q_1 - q_2) \ln [\cos \psi + (q_1 - q_2) \sin \psi] \right\}. \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) определяют поле напряжений в пластической области $a \leq \rho \leq \rho_c$. Пусть $\psi = \psi_c$ при $\rho = \rho_c$ и $\sigma_0 = \sigma_s$ в (8). Тогда из (8), (15), (16) и условия непрерывности напряжений σ_r и σ_θ при $\rho = \rho_c$ следует, что

$$\ln \frac{\rho_c}{a} = -\frac{q_1}{1+(q_1-q_2)^2} \times \times \left\{ \psi_c + (q_1 - q_2) \ln [\cos \psi_c + (q_1 - q_2) \sin \psi_c] \right\},$$

$$\frac{A}{\rho_c^2} + B = q_1 \sin \psi_c, \quad (17)$$

$$-\frac{A}{\rho_c^2} + B = q_2 \sin \psi_c - \cos \psi_c.$$

Из двух последних уравнений находим

$$B = \frac{1}{2} [(q_1 + q_2) \sin \psi_c - \cos \psi_c],$$

$$A = \frac{\rho_c^2}{2} [(q_1 - q_2) \sin \psi_c + \cos \psi_c]. \quad (18)$$

В этих уравнениях ρ_c можно исключить с помощью первого уравнения в (17). Таким образом, величины A , B и ρ_c известны как функции ψ_c . Подставляя эти функции в (9), получаем уравнение для определения значения ψ_c , соответствующего заданному значению P . После решения этого уравнения

распределение напряжений следует из (15) и (16) в области $a \leq \rho \leq \rho_c$ и из (8) и (18) в области $\rho_c \leq \rho \leq 1$.

При упругой разгрузке приращение напряжений $\Delta\sigma_r$ и $\Delta\sigma_\theta$ определяется на основе закона Гука. Таким образом, общее решение имеет вид (8). При этом крайевые условия принимают форму $\Delta\sigma_r = 0$ при $\rho = 1$ и $\Delta\sigma_r = P$ при $\rho = a$. В этом случае решение для $\Delta\sigma_r$ и $\Delta\sigma_\theta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\sigma_r}{\sigma_0} &= \frac{p}{1-a^2} \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right), \\ \frac{\Delta\sigma_\theta}{\sigma_0} &= \frac{p}{1-a^2} \left(1 + \frac{a^2}{\rho^2} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Распределение остаточных напряжений определяется из

$$\frac{\sigma_r^{res}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_r^f}{\sigma_0} + \frac{\Delta\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \frac{\sigma_\theta^{res}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_\theta^f}{\sigma_0} + \frac{\Delta\sigma_\theta}{\sigma_0}, \quad (20)$$

где σ_r^f и σ_θ^f — распределения радиального и окружного напряжений в конце процесса нагружения. Величина σ_0 в (19) и (20), включая выражение величины p через P , определяется в зависимости от используемого условия текучести. Решение при упругой разгрузке имеет силу, если выполняются неравенства

$$\left(\frac{\sigma_r^{res}}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{\eta_1^2} \left(\frac{\sigma_\theta^{res}}{\sigma_0} \right)^2 - \frac{\eta}{\eta_1} \frac{\sigma_r^{res}}{\sigma_0} \frac{\sigma_\theta^{res}}{\sigma_0} \leq \frac{\sigma_A^2}{\sigma_0^2} \quad (21)$$

в случае условия (1) и

$$\left(\frac{\sigma_r^{res}}{\sigma_0} \right)^2 - \frac{2\bar{R}}{1+\bar{R}} \frac{\sigma_r^{res}}{\sigma_0} \frac{\sigma_\theta^{res}}{\sigma_0} + \left(\frac{\sigma_\theta^{res}}{\sigma_0} \right)^2 \leq 1 \quad (22)$$

в случае условия (14).

Для иллюстрации влияния осреднения условия текучести на распределение остаточных напряжений рассмотрим диск внутреннего радиуса $a = 0,35$, который изготовлен из алюминиевого сплава 5352, обладающего следующими свойствами $X = 197,59$ МПа, $Y = 278,86$ МПа, $R_0 = 0,535$, $R_{15} = 0,465$, $R_{30} = 0,655$, $R_{45} = 1,105$, $R_{60} = 1,415$, $R_{75} = 1,595$, $R_{90} = 2,270$ [15], и нагружен давлением $P = 140$ МПа. Расчеты проведены для следующих случаев: предел текучести в направлении радиальной координаты равен X ($\sigma_A = \sigma_0 = X$); предел текучести в направлении радиальной координаты равен Y ($\sigma_A = \sigma_0 = Y$);

в соответствии с формулой (4) осреднение производится на основании 2, 3 и 7 испытаний:

$$\begin{aligned} \bar{R}_I &= \frac{R_0 + R_{90}}{2}, \quad \bar{R}_{II} = \frac{R_0 + 2R_{45} + R_{90}}{4}, \\ \bar{R}_{III} &= \frac{R_0 + 2(R_{15} + R_{30} + R_{45} + R_{60} + R_{75}) + R_{90}}{12}. \end{aligned} \quad (23)$$

После определения остаточных напряжений проверяли условия (21) и (22).

Как видно из рис. 1а распределение радиального напряжения незначительно зависит от метода осреднения. Влияние метода осреднения на распределение окружного напряжения более значительно из-за отклонения распределения при $\bar{R} = \bar{R}_I$ от двух других распределений (рис. 1б).

Влияние метода осреднения на распределение остаточных напряжений показано на рис. 2. Имеется существенное отклонение распределения радиального напряжения при $\bar{R} = \bar{R}_I$ от двух других распределений, хотя величина этого напряжения достаточно мала (рис. 2а). Влияние метода осреднения на

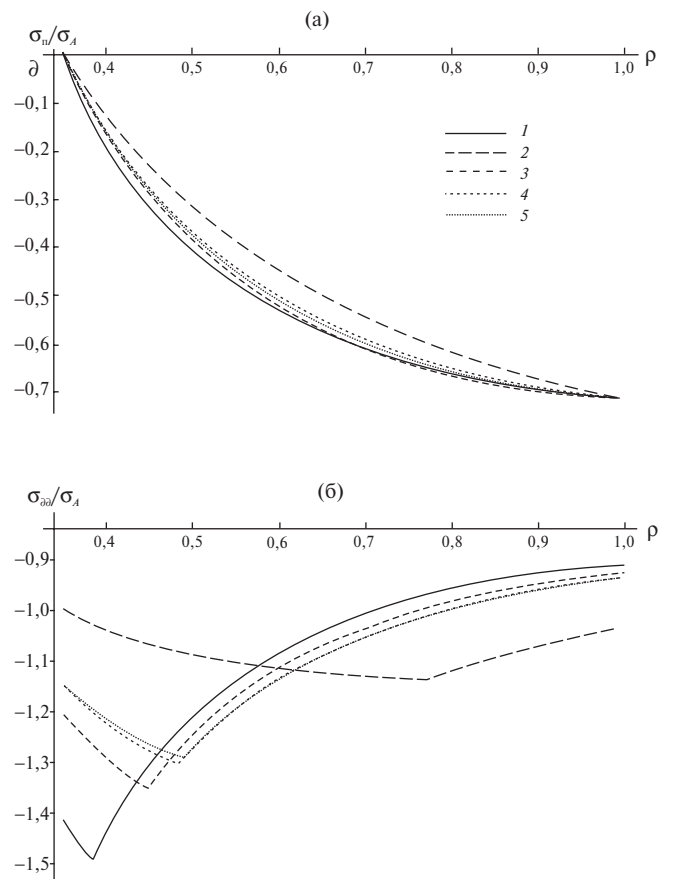


Рис. 1. Распределение радиальных (а) и окружных (б) напряжений. Здесь и на рис. 2: 1 — $\sigma_A = X$; 2 — $\sigma_A = Y$; 3 — \bar{R}_I ; 4 — \bar{R}_{II} ; 5 — \bar{R}_{III} .

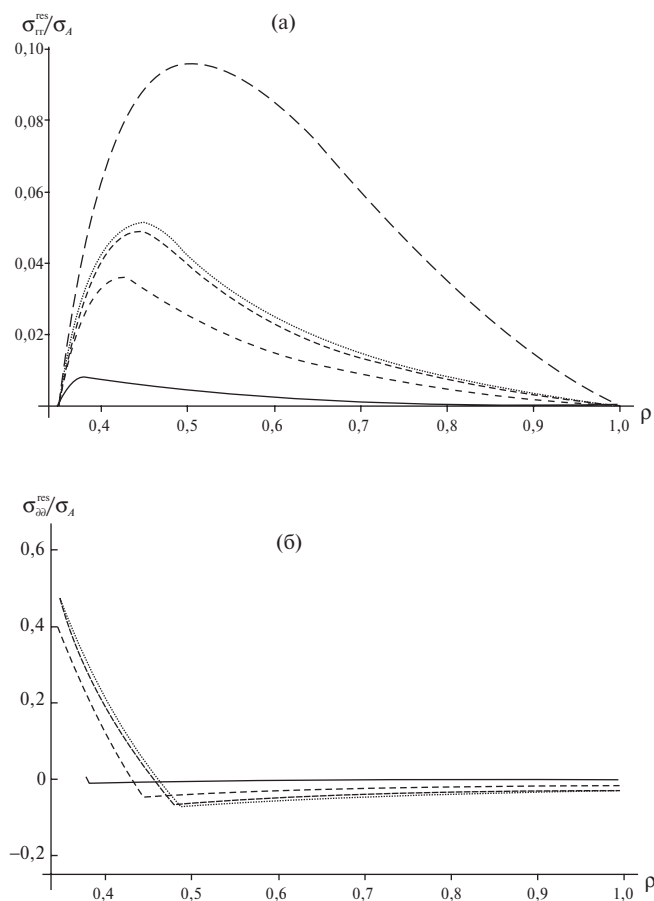


Рис. 2. Распределение остаточных радиальных (а) и окружных (б) напряжений.

остаточное окружное напряжение сопоставимо с влиянием на окружное напряжение при нагрузке (рис. 1б и 2б).

В отличие от влияния метода осреднения на распределение напряжений при нагрузке и остаточных напряжений имеется весьма значительное различие в распределении всех рассмотренных напряжений, полученных при применении точного и осреднённого условий текучести. Это ставит под сомнение целесообразность использования осреднённых условий текучести для расчётов процессов деформирования, так как может приводить к занижению/завышению технологических параметров формообразования.

Источники финансирования. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ВАНТ в рамках научного проекта № 17–58–540007.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Микляев П.Г., Фридман Я.Б. Анизотропия механических свойств металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
1. Lankford W.T., Snyder S.C., Bausher J.A. // Trans. Amer. Soc. Metals. 1950. V. 42. P. 1197–1232.
4. Banabic D. Sheet Metal Forming Processes: Constitutive Modelling and Numerical Simulation. Heidelberg: Springer, 2010. 301 p.
5. Шевелев В.В., Яковлев С.П. Анизотропия листовых материалов и ее влияние на вытяжку. М.: Машиностроение, 1972. 132 с.
6. Гречников Ф.В. Деформирование анизотропных материалов (резервы интенсификации). М.: Машиностроение, 1998. 448 с.
7. Lequeu P.H., Jonas J.J. // Metallurg. Trans. A. 1988. V. 19, Iss. 1. P. 105–120.
8. Wang X., Guo M., Cao L., Peng X., Zhang J., Zhuang L. // J. Wuhan Univ. Technol. Materials Sci. Edition. 2016. V. 31. Iss. 3. P. 648–653.
9. Inoue H., Takasugi T. // Materials Trans. 2007. V. 48. Iss. 8. P. 2014–2022.
10. Серебряный В.Н., Позднякова Н.Н. // Металлы. 2009. № 1. С. 66–72.
11. Гречников Ф.В., Ерисов Я.А., Зайцев В.М. // Изв. Самар. науч. центра РАН. 2014. Т. 16, № 4–1. С. 154–157.
12. Wagoner R.H., Li M. // Int. J. Plast. 2007. V. 23. P. 345–360.
13. Prime M.B. // Int. J. Solids and Struct. 2017. V. 118–119. P. 1339–1351.
14. Alexandrov S. Elastic/Plastic Discs under Plane Stress Conditions. Heidelberg: Springer, 2015. 113 p.
15. Watson M., Dick R., Huang Y.H., Lockley A., Cardoso R., Santos A. // J. Phys.: Conf. Ser. 2016. V. 734. Iss. 2. 022001.

EFFECT OF THE ANISOTROPIC YIELD CONDITION ON THE PREDICTED DISTRIBUTION OF RESIDUAL STRESSES IN A THIN DISK

Academician of the RAS F. V. Grechnikov¹, Ya. A. Erisov², S. E. Alexandrov³

¹*Samara Science Center of the Russian Academy of Sciences, Samara, Russian Federation*

²*Samara National Research University, Samara, Russian Federation*

³*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received February 07, 2019

The effect of the replacement of the exact yield condition by that averaged over the distribution of residual stresses in a thin hollow disk subjected to external pressure and subsequent unloading is investigated. The formulation of the boundary-value problem is specially simplified so that it is possible to obtain a mathematically exact semi-analytical solution, with the help of which it is easy to investigate the effect of averaging the yield condition on the stressed state including the distribution of residual stresses. The accepted exact yield condition is averaged using several generally accepted approaches. The comparative analysis of the distribution of residual stresses shows a significant deviation of the distribution resulting from solutions for the averaged yield conditions from the exact distribution of residual stresses.

Keywords: anisotropy, transversal anisotropy, yield condition, residual stresses, boundary-value problem.