ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 4, с. 399–404

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУПП И ОЦЕНКИ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СТАЦИОНАРНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ДИФФУЗИЙ

В. И. Богачев[1,2,3,*], А. Ф. Мифтахов[1], С. В. Шапошников[1,2,3]

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 19.10.2018 г.

Поступило 16.11.2018 г.

Получены новые оценки для расстояния по полной вариации и по метрике Канторовича между стационарными распределениями диффузионных процессов, выраженные через некоторые расстояния между коэффициентами диффузии и сноса.

Ключевые слова: диффузионная полугруппа, стационарное распределение, расстояние по вариации, расстояние Канторовича.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524854399-404

Во многих вопросах теории диффузионных процессов важную роль играют оценки расстояний между распределениями, в частности, с их помощью строится теория нелинейных уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова, исследуется зависимость от параметра, решаются задачи оптимального контроля распределений диффузионных процессов (см., например, [1, 2]). Предположим, что μ и σ — стационарные распределения двух диффузионных процессов в $\mathbb{R}^d$ с коэффициентами сноса b_μ, b_σ и матрицами диффузии A_μ, A_σ. Здесь и далее индексы коэффициентов служат лишь для указания уравнений, которым удовлетворяют меры, но не означают какой-либо зависимости коэффициентов от решений (в отличие от нелинейных уравнений, рассмотренных в [1]). Цель работы — получить оценки полной вариации $\|\mu - \sigma\|_{TV}$ и метрики Канторовича $W_1(\mu, \sigma)$ (см. определение ниже) через некоторые расстояния между коэффициентами. Хорошо известно, что стационарное распределение диффузии является решением стационарного уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова, т.е. μ и σ являются решениями уравнений

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a_\mu^{ij}\mu) - \partial_{x_i}(b_\mu^i\mu) = 0,$$
$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a_\sigma^{ij}\sigma) - \partial_{x_i}(b_\sigma^i\sigma) = 0.$$

Здесь мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам. Кратко эти уравнения можно записать как $L_\mu^*\mu = 0$ и $L_\sigma^*\sigma = 0$, где операторы L_μ^* и L_σ^* являются формально сопряжёнными к операторам

$$L_\mu = a_\mu^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + b_\mu^i\partial_{x_i}, \quad L_\sigma = a_\sigma^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j} + b_\sigma^i\partial_{x_i}.$$

Уравнение понимается в смысле интегрального равенства

$$\int L_\mu\varphi\, d\mu = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

причём предполагается, что a_μ^{ij} и b_μ^i интегрируемы на шарах относительно μ. Далее матрица диффузии предполагается симметричной и неотрицательно определённой. Исследованию таких уравнений посвящена книга [3]. Если при некотором $p > d$ для всякого шара U выполнено условие

$$(\mathrm{H_p}) \quad a_\mu^{ij} \in W^{1,p}(U), \quad b_\mu^i \in L^p(U),$$
$$A_\mu(x) \geq C(U)I \quad \forall x \in U,$$

то решение μ имеет непрерывную положительную плотность ρ_μ относительно меры Лебега и ρ_μ входит в локальный класс Соболева $W_{\mathrm{loc}}^{p,1}(\mathbb{R}^d)$ (см. [3]). Мы изучаем стационарные распределения диффузии именно как решения стационарного уравнения Колмогорова. В работах [2, 4, 5] были рассмотрены два метода получения таких оценок: использование перенормировки решения и уравнения Пуассона. Идея перенормировки состоит в следующем. Пусть ρ_μ и ρ_σ — плотности мер μ и σ соответственно и $v = \dfrac{\rho_\sigma}{\rho_\mu}$.

Тогда при некоторых ограничениях на коэффициенты удаётся доказать оценку

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[2] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва*

[3] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва*

**E-mail*: *vibogach@mail.ru*

$$\int \frac{|\sqrt{A_\mu}\nabla v|^2}{v} d\mu \le \int |A_\mu^{-1/2}\Phi|^2 d\sigma,$$

где

$$\Phi = \frac{(A_\mu - A_\sigma)\nabla\rho_\sigma}{\rho_\sigma} + h_\sigma - h_\mu. \qquad (1)$$

Если $A_\mu = A_\sigma$, то $\Phi = b_\sigma - b_\mu$. Из этой оценки при дополнительном предположении, что относительно меры μ выполнено логарифмическое неравенство Соболева (см. [3, 6, 7]), можно получить оценку энтропии, из которой согласно транспортному неравенству и неравенству Кулбака следуют оценки расстояния $\|\mu - \sigma\|_{TV}$ и квадратичного расстояния Канторовича $W_2(\mu, \sigma)$ (см. [6]; в теоремах ниже используется только расстояние W_1). Типичный результат, который можно получить таким способом, имеет следующий вид.

Если $A_\mu = A_\sigma = I$, b_μ, b_σ локально ограничены и

$$\langle b_\mu(x) - b_\mu(y), x - y\rangle \le -\kappa|x - y|^2,$$

то для решения μ имеет место логарифмическое неравенство Соболева с константой $\frac{2}{\kappa}$ и верны оценки

$$W_2(\mu, \sigma) \le \frac{1}{\kappa}\|b_\mu - b_\sigma\|_{L^2(\sigma)},$$
$$\|\mu - \sigma\|_{TV} \le \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\|b_\mu - b_\sigma\|_{L^2(\sigma)}.$$

Вместо логарифмического неравенства Соболева можно предполагать, что для μ выполнено неравенство Пуанкаре, из которого выводится оценка интеграла Хеллингера и полной вариации. Отметим, что в общей ситуации трудно выразить через коэффициенты то, что для решения верны логарифмическое неравенство Соболева и неравенство Пуанкаре. Кроме того, в правой части неравенств появляется именно L^2-норма разности между коэффициентами.

Идея получения оценок с помощью уравнения Пуассона состоит в следующем. Пусть u — решение уравнения Пуассона $L_\mu u = \psi$, где

$$\psi = \varphi - \int \varphi d\mu, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Поскольку $L_\mu^*(\mu - \sigma) = \operatorname{div}(\Phi\sigma)$, то, умножая на u, интегрируя по частям и учитывая, что интеграл от константы по $\mu - \sigma$ равен нулю, получаем равенство

$$\int \varphi d(\mu - \sigma) = \int \langle \Phi, \nabla u\rangle d\sigma.$$

Теперь для получения оценки достаточно оценить $|\nabla u|$. В зависимости от способа получения такой оценки предполагается ограниченность $|\varphi|$ или $|\nabla\varphi|$ и, соответственно, в итоге получается оценка полной вариации или метрики Канторовича. Типичный результат имеет следующий вид. Предположим, что

$$A_\mu = A_\sigma = I, |b_\mu(x)| + |b_\sigma(x)| \le C_0(1 + |x|)^m,$$
$$\langle b_\mu(x), x\rangle \le -\gamma|x|^2,$$

где $m \ge 1$, $\gamma > 0$ и $C_0 > 0$ — некоторые числа. Если мера σ имеет конечный момент порядка $2m + 2$, то

$$\|(1 + |x|)^2(\mu - \sigma)\|_{TV} \le C\|b_\mu - b_\sigma\|_{L^2(\sigma)}\Big(\|(1 + |x|)^2\|_{L^2(\sigma)} + $$
$$+ \|(1 + |x|)^2(b_\mu - b_\sigma)\|_{L^2(\sigma)}\Big).$$

Основная трудность применения такого подхода состоит в том, что константа в правой части неравенства связана с априорными оценками решений уравнения Пуассона и, вообще говоря, весьма сложно зависит от коэффициентов и размерности пространства.

В этом сообщении мы рассматриваем третий способ получения оценок на расстояние между стационарными распределениями, который связывает такие оценки со свойствами полугруппы, порождаемой оператором L_μ. Важными преимуществами таких оценок являются отсутствие зависимости от размерности (оценки зависят от размерности ровно так же, как и используемые оценки полугрупп) и привлечение L^1-нормы разности коэффициентов вместо L^2-нормы. Отметим, что полугруппа, порождаемая L_μ, обычно применяется для вывода логарифмического неравенства Соболева или неравенства Пуанкаре для меры μ и априорных оценок на решение уравнения Пуассона $L_\mu u = \psi$ (см. [8—10]) и тем самым имеет отношение ко всем упомянутым выше методам.

Проиллюстрируем новый способ получения оценок на относительно простом, но важном примере. Пусть $A_\mu = A_\sigma = I$ и $b_\mu = -x$, $b_\sigma = -x + h(x)$. В этом случае μ — стандартная гауссовская мера с плотностью $(2\pi)^{-d/2}e^{-|x|^2/2}$ относительно меры Лебега, которая удовлетворяет уравнению

$$L_\mu^*\mu = \Delta\mu + \operatorname{div}(x\mu) = 0,$$

где $L_\mu f(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle$ — оператор Орнштейна—Уленбека. Оператор L_σ является возмущением оператора L_μ членом первого порядка. Пусть $\{T_t\}$ — полугруппа Орнштейна—Уленбека (см. [7]), заданная формулой

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\, y\right)\mu(dy).$$

Мера μ инвариантна для этой полугруппы, т.е. для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ верно равенство

$$\int T_t\varphi d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Кроме того,

$$\nabla T_t\varphi = e^{-t}T_t\nabla\varphi, \tag{2}$$

$$|\nabla T_t\varphi(x)| \le \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\|\varphi\|_\infty. \tag{3}$$

При $t > 0$ функция $x \mapsto T_t\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и все её производные ограничены после умножения на любой многочлен, что следует из равенства (2). Предположим, что $|h| \in L^1(\sigma)$. Тогда при $t > 0$ из уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова легко выводится равенство

$$\int L_\sigma T_t\varphi d\sigma = 0.$$

Следовательно,

$$\int L_\mu T_t\varphi d\sigma = -\int \langle h, \nabla T_t\varphi\rangle d\sigma.$$

Принимая во внимание инвариантность меры μ и равенство

$$L_\mu T_t\varphi = \frac{d}{dt}T_t\varphi,$$

получаем

$$-\frac{d}{dt}\int T_t\varphi d(\mu-\sigma) = \int \langle h, \nabla T_t\varphi\rangle d\sigma. \tag{4}$$

Заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}dt = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $|\varphi| \le 1$. Тогда с учётом неравенства (3) имеем

$$\int_0^{+\infty}\int \langle h, \nabla T_t\varphi\rangle d\sigma dt \le \frac{\pi}{2}\|h\|_{L^1(\sigma)}.$$

Интегрируя (4) по t от 0 до $+\infty$ и учитывая, что

$$\lim_{t\to+\infty} T_t\varphi(x) = \int \varphi d\mu,$$

выводим оценку

$$\int \varphi d(\mu-\sigma) \le \frac{\pi}{2}\|h\|_{L^1(\sigma)},$$

из которой в силу произвольности φ следует оценка вариации меры $\mu - \sigma$.

С помощью (2) можно просто получить оценку и на метрику Канторовича W_1 (см. [6]). Напомним, что для мер с конечными первыми моментами она задаётся формулой

$$W_1(\mu, \sigma) = \sup\left\{\int \varphi d(\mu-\sigma)\colon \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ |\nabla\varphi| \le 1\right\}.$$

Если $|\nabla\varphi| \le 1$, то $|\nabla T_t\varphi| \le e^{-t}$ и имеет место оценка

$$\int \varphi d(\mu-\sigma) \le \|h\|_{L^1(\sigma)},$$

из которой следует оценка на $W_1(\mu, \sigma)$. Получаем такой результат.

Теорема 1. *Пусть μ — стандартная гауссовская мера, вероятностная мера σ является решением уравнения $L_\sigma^*\sigma = 0$ с оператором*

$$L_\sigma u(x) = \Delta u(x) + \langle -x + h(x), \nabla u(x)\rangle,$$

причём $|h| \in L^1(\sigma)$. Тогда

$$\|\mu - \sigma\|_{TV} \le \frac{\pi}{2}\|h\|_{L^1(\sigma)}.$$

Кроме того,

$$W_1(\mu, \sigma) \le \|h\|_{L^1(\sigma)}.$$

Мы покажем, что такого рода оценки можно получить в значительно более общей ситуации.

Пусть теперь уже необязательно гауссовская вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет уравнению

$$L_\mu^*\mu = 0,$$

в котором коэффициенты a_μ^{ij}, b_μ^i удовлетворяют условиям (H_p) с некоторым показателем $p > d + 2$. Согласно [3, теорема 5.2.2] существует субмарковская полугруппа $\{T_t^\mu\}$ на $L^1(\mu)$ (и на всех $L^p(\mu)$ с $p < \infty$), генератор L которой совпадает с L_μ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, причём его резольвента $(1-L)^{-1}$ определяется тем, что $w = (1-L)^{-1}u$ есть решение уравнения $w - L_\mu w = u$ для $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, полученное как предел решений соответствующих краевых задач на расширяющихся шарах. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, то при фиксированном t функция $T_t^\mu f$ входит в область определения генератора полугруппы, поэтому на каждом шаре она входит в класс Соболева $W^{p,2}$ функций с первыми и вторыми производными в L^p (см. [3, теорема 5.2.7]). Поэтому $L_\mu T_t f$ можно рассматривать в соболевском смысле. В силу [3, теорема 5.4.5] можно считать, что эта полугруппа $\{T_t^\mu\}$ задана субвероятностным ядром $\rho(t, x, y)$, т.е.

$$T_t^\mu f(x) = \int f(y)\rho(t, x, y)dy,$$

причём функция $\rho(t, x, y)$ является локально гёльдеровой и строго положительной на $(0, +\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$. Если мера μ инвариантна для $\{T_t^\mu\}$, то $\{T_t^\mu\}$ — марковская полугруппа и μ — единственное вероятностное решение уравнения $L_\mu^*\mu = 0$. Более того, согласно [3, замечание 5.4.6], если мера μ инвариантна для полугруппы $\{T_t\}$, то для всякой функции $f \in L^1(\mu)$ имеем

$$T_t^\mu f(x) \to \int f d\mu \quad \text{при } t \to +\infty$$

равномерно на всяком шаре. Случай $A_\mu = I$, $b_\mu(x) = -x$ соответствует полугруппе Орнштейна—Уленбека.

Через $\|f\|_\infty$ будем обозначать норму в L^∞, для непрерывных функций она равна $\sup_x |f(x)|$.

Теорема 2. *Пусть мера* μ *инвариантна для полугруппы* $\{T_t^\mu\}$ *и для всякой функции* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *функция* $x \mapsto T_t^\mu f(x)$ *липшицева, причём для некоторых чисел* $N > 0$ *и* $\lambda > 0$, *не зависящих от* f, *верна оценка*

$$\|\nabla T_t^\mu f\|_\infty \le N t^{-1/2} e^{-\lambda t}\|f\|_\infty. \qquad (5)$$

Предположим, что вероятностная мера σ *— решение уравнения* $L_\sigma^*\sigma = 0$, *причём коэффициенты* $a_\sigma^{ij}, b_\sigma^i$ *удовлетворяют условию* $(\mathrm{H_q})$ *с* $q > d$. *Если коэффициенты* a_μ^{ij}, b_μ^i *и векторное поле* Φ, *заданное* (1), *принадлежат* $L^1(\sigma)$, *то*

$$\|\mu - \sigma\|_{TV} \le C\|\Phi\|_{L^1(\sigma)}, \quad C = N\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

Доказательство. Заметим, что $L_\mu^*\sigma = \operatorname{div}(\Phi\sigma)$. Пусть $f, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда

$$-\int [\psi L_\mu T_t^\mu f + T_t^\mu f L_\mu \psi + 2\langle A_\mu \nabla\psi, \nabla T_t^\mu f\rangle] d\sigma = \\ = \int [\psi\langle\Phi, \nabla T_t^\mu f\rangle + T_t^\mu f\langle\Phi, \nabla\psi\rangle] d\sigma.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}T_t^\mu f = L_\mu T_t^\mu f$, то, интегрируя по t, получаем равенство

$$\int \psi f d\sigma - \int T_t^\mu f \psi d\sigma - \\ - \int_0^t \int [T_s^\mu f L_\mu \psi + 2\langle A_\mu\nabla\psi, \nabla T_s^\mu f\rangle] d\sigma ds = \\ = \int_0^t \int [\psi\langle\Phi, \nabla T_s^\mu f\rangle + T_s^\mu f\langle\Phi, \nabla\psi\rangle] d\sigma ds.$$

Подставим вместо ψ функцию $\psi_N(x) = \zeta\left(\frac{x}{N}\right)$, где $\zeta(x) = 1$ в окрестности нуля и $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, и перейдём к пределу при $N \to \infty$. Получаем

$$\int f d\sigma - \int T_t^\mu f d\sigma = \int_0^t \int \langle\Phi, \nabla T_s^\mu f\rangle d\sigma ds.$$

Следовательно, при $|f| \le 1$ имеем

$$\int f d\sigma - \int T_t^\mu f d\sigma \le \|\Phi\|_{L^1(\sigma)} \int_0^t N s^{-1/2} e^{-\lambda s} ds.$$

Полагая $t \to +\infty$ и учитывая, что предел $T_t^\mu f$ равен интегралу от f по мере μ, приходим к оценке

$$\int f d(\sigma - \mu) \le N\sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}\|\Phi\|_{L^1(\sigma)},$$

из которой следует нужное неравенство.

Пусть $A_\mu = I$. Покажем, что условие (5) выполнено, если для полугруппы имеет место оценка

$$|\nabla T_t^\mu f(x)| \le C e^{-\kappa t} T_t^\mu |\nabla f|(x). \qquad (6)$$

Пусть $\tau > 0$ и $t \in [0, \tau]$. Функция $T_{\tau-t}^\mu f(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}T_{\tau-t}^\mu f(x) + L_\mu T_{\tau-t}^\mu f(x) = 0, \quad T_{\tau-t}^\mu f(x)\Big|_{t=\tau} = f(x).$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}|T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 + L_\mu |T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 = 2|\nabla T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}T_t |T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 = L_\mu T_t^\mu |T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 + \\ + 2T_t^\mu|\nabla T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 - T_t^\mu L_\mu |T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2.$$

Поскольку $T_t^\mu L_\mu g = L_\mu T_t^\mu g$ для всякой функции g из области определения генератора L_μ, то

$$\frac{d}{dt}T_t^\mu |T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 = 2T_t^\mu |\nabla T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2.$$

Интегрируя это равенство по t, получаем

$$2\int_0^\tau T_t^\mu |\nabla T_{\tau-t}^\mu f(x)|^2 dt = \\ = T_\tau^\mu |f(x)|^2 - |T_\tau^\mu f(x)|^2 \le T_\tau^\mu |f(x)|^2.$$

Итак, имеем

$$|\nabla T_\tau^\mu f(x)| = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau |\nabla T_t^\mu (T_{\tau-t}^\mu f)(x)| dt \le \\ \le \frac{1}{\tau}\int_0^\tau C e^{-\kappa t} T_t^\mu |\nabla T_{\tau-t}^\mu f|(x) dt.$$

Неравенство Гёльдера даёт оценку

$$|\nabla T_\tau^\mu f(x)| \le \frac{C\sqrt{1-e^{-\kappa\tau}}}{\tau\sqrt{2\kappa}}\left(\int_0^\tau T_t^\mu |\nabla T_{\tau-t}^\mu f|^2(x)dt\right)^{1/2} \le$$
$$\le C_1 \frac{\sqrt{T_\tau^\mu f^2(x)}}{\sqrt{\tau}}.$$

Кроме того, при $\tau > 2$ верна оценка

$$|\nabla T_\tau^\mu f(x)| = |\nabla T_{\tau-1}^\mu (T_1^\mu f)(x)| \le e^{-\kappa(\tau-1)} T_{\tau-1}^\mu |\nabla T_1^\mu f(x)|.$$

Окончательно получаем оценку

$$|\nabla T_\tau^\mu f(x)| \le C_2 \tau^{-1/2} e^{-\kappa\tau} \|f\|_\infty.$$

Согласно [3, теорема 5.6.41] условие (6) (значит, и (5)) выполнено, если

$$\langle b_\mu(x) - b_\mu(y),\, x - y\rangle \le -\kappa|x-y|^2.$$

Отметим, что это же условие гарантирует инвариантность меры μ относительно полугруппы $\{T_t^\mu\}$. Следующее утверждение даёт оценку расстояния по вариации при несколько иных предположениях о полугруппе. Отметим, что полугруппа $\{(T_t^\mu)^*\}$, сопряжённая к $\{T_t^\mu\}$ на $L^2(\mu)$, непрерывна на всех $L^q(\mu)$ при $1 \le q < \infty$, причём если мера μ инвариантна для $\{T_t^\mu\}$, то инвариантна и для $\{(T_t^\mu)^*\}$, см. [3, гл. 5].

Теорема 3. *Пусть мера* μ *инвариантна для полугруппы* $\{T_t^\mu\}$, *причём функция* $x \mapsto T_t^\mu f(x)$ *липшицева при* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Предположим, что существуют непрерывные функции* $W \ge 1$ *и* $V \ge 1$ *на* $\mathbb{R}^d$ *и* $G > 0$, $Q > 0$ *на* $(0, +\infty)$, *такие, что* W *интегрируема относительно* μ *и* σ,

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = 0, \quad \int_0^t G(s)ds < \infty \ \ \forall t > 0,$$

$$|\nabla T_t^\mu f(x)| \le G(t)V(x)\left\|\frac{f}{W}\right\|_\infty, \tag{7}$$

$$\|W((T_t^\mu)^*\sigma - \mu)\|_{TV} \le Q(t)\|W(\sigma-\mu)\|_{TV}. \tag{8}$$

Если функция $V\Phi$ *интегрируема относительно* σ, *то*

$$\|W(\mu-\sigma)\|_{TV} \le C\|V\Phi\|_{L^1(\sigma)},$$

где C *зависит только от функций* G *и* Q.

Доказательство. Аналогично доказательству выше получаем равенство

$$\int f d(\sigma-\mu) = \int T_t^\mu f d(\sigma-\mu) - \int_0^t \int \langle \nabla T_s^\mu f,\, \Phi\rangle d\sigma ds.$$

Пусть теперь $|f| \le W$ и выполнены условия (7), (8). Поскольку $(T_t^\mu)^*\mu = \mu$, то

$$\int T_t^\mu f d(\sigma-\mu) = \int f d((T_t^\mu)^*\sigma - \mu) \le$$
$$\le \|W((T_t^\mu)^*\sigma-\mu)\|_{TV} \le Q(t)\|W(\sigma-\mu)\|_{TV}.$$

Кроме того,

$$\int_0^t \int \langle \nabla T_s f,\, \Phi\rangle d\sigma ds \le \int_0^t G(s)ds \|V\Phi\|_{L^1(\sigma)}.$$

Получаем

$$\|W(\sigma-\mu)\|_{TV} \le Q(t)\|W(\sigma-\mu)\|_{TV} + \|\Phi\|_{L^1(\sigma)} \int_0^t G(s)ds.$$

Возьмём столь большое t, что $Q(t) < 1$. Тогда

$$\|W(\sigma-\mu)\|_{TV} \le C\|V\Phi\|_{L^1(\sigma)}, \quad C = (1-Q(t))^{-1}\int_0^t G(s)ds,$$

что завершает доказательство.

Условие (8) — оценка скорости сходимости к стационарной мере. Приведём пример выполнения такого условия. Пусть $A_\mu = I$, b_μ локально ограничено и существует функция Ляпунова $W \in C^2(\mathbb{R}^d)$, для которой $\lim\limits_{|x|\to+\infty} W(x) = +\infty$ и $L_\mu W \le N_1 - N_2 W$ для некоторых положительных чисел N_1 и N_2. Тогда для всякой вероятностной меры ν, для которой $W \in L^1(\nu)$, имеет место оценка

$$\|W((T_t^\mu)^*\nu - \mu)\|_{TV} \le C_1 e^{-C_2 t}\|W(\nu-\mu)\|_{TV}$$

с некоторыми константами $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, см., например, [11, лемма 3.5], где это доказано с помощью известной теоремы Харриса, а также [12] (отметим, что $(T_t^\mu)^*$ продолжается и на меры, см. [3, гл. 5]).

Обсудим теперь условие (7). В работах [13] и [14] получены оценки градиента диффузионной полугруппы при широких условиях на коэффициенты, в частности доказан следующий результат. Если $A_\mu(x) = \lambda I + Q(x)^2$ для некоторого $\lambda > 0$ и некоторой симметричной матрицы Q, которая вместе с b_μ удовлетворяет условию

$$\|Q(x)-Q(y)\|^2 + \langle b_\mu(x) - b_\mu(y),\, x-y\rangle \le$$
$$\le g(|x-y|)|x-y|, \tag{9}$$

где $x, y \in \mathbb{R}^d$, $|x-y| < 1$ и g — интегрируемая неотрицательная непрерывная функция на $(0, 1)$, то $|\nabla T_t^\mu f(x)| \le \dfrac{C\|f\|_\infty}{\sqrt{\min\{t, 1\}}}$.

Пусть теперь отображение A_μ ограничено и

$$\langle b_\mu(x),\, x\rangle \le N_1 - N_2|x|^k, \tag{10}$$

где $k > 2$ и $r \geq 2$. В силу [3, пример 7.1.5] имеет место неравенство

$$T_t^{\mu}|x|^r \leq N_3 t^{-r/(k-2)}$$

с константой, не зависящей от t. Сопоставляя эту оценку с оценкой градиента, получаем, что для всех функций $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x)| \leq W(x) = 1 + |x|^r$, выполнена оценка

$$|\nabla T_t^{\mu} f(x)| = |\nabla T_{t/2}^{\mu}(T_{t/2}^{\mu} f)(x)| \leq$$
$$\leq C \min\{t, 1\}^{-1/2 - r/(k-2)}.$$

Если $\dfrac{r}{k-2} < \dfrac{1}{2}$, то для полугруппы выполнено условие (7). Условия (9) и (10) выполнены, если $A_{\mu} = I$ и $b_{\mu}(x) = -x|x|^k + h(x)$, где

$$\langle h(x) - h(y), x - y\rangle \leq \beta|x - y|^2, \quad \beta > 0.$$

Если $\dfrac{r}{k-2} < \dfrac{1}{2}$ для некоторого числа $r > 2$, то (7) выполнено с $V(x) = \mathrm{const}$ и $W(x) = 1 + |x|^r$. Более того, с $W(x) = 1 + |x|^r$ выполнено (8), следовательно,

$$\|(1 + |x|^r)(\mu - \sigma)\|_{TV} \leq C\|\Phi\|_{L^1(\sigma)}.$$

Представляет интерес нахождение более общих условий в терминах коэффициентов A_{μ} и b_{σ}, при которых выполнены (7) и (8), например, привлекая результаты работы [15].

Источники финансирования. Работа поддержана грантом Президента РФ МД 207.2017.1, проектами РФФИ 17–01–00662 и 18–31–20008, DFG RO 1195/12–1 и Фондом Саймонса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Funct. Anal. 2016. V. 271. P. 1262–1300.
2. *Богачев В.И., Кириллов А.И., Шапошников С.В.* // Теория вероятностей и ее применение. 2017. Т. 62. № 1. С. 16–43.
3. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov Equations // Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2015.
4. *Bogachev V.I., Kirillov A.I., Shaposhnikov S.V.* // Math. Notes. 2014. V. 96. № 6. P. 855–863.
5. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Math. Sci. (N.Y.). 2018. V. 232. № 3. P. 254–282.
6. *Богачев В.И., Колесников А.В.* // УМН. 2012. Т. 67. № 5. С. 3–110.
7. *Богачев В.И.* // УМН. 2018. Т. 73. № 2. С. 3–74.
8. *Pardoux E., Veretennikov A.Yu.* // Ann. Probab. 2001. V. 29. P. 1061–1085.
9. *Cattiaux P., Guillin A., Wang F.-Y., Wu L.* // J. Funct. Anal. 2009. V. 256. P. 1821–1841.
10. *Cattiaux P., Guillin A.* // J. Funct. Anal. 2017. V. 272. P. 2361–2391.
11. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // Arxiv. org 18001.02446v1.
12. *Ji M., Shen Z., Yi Y.* // J. Dyn. Different. Equat. 2018.
13. *Priola E., Wang F.Y.* // J. Funct. Anal. 2006. V. 236. P. 244–264.
14. *Porretta A., Priola E.* // J. Math. Pures and Appl. 2013. V. 100. P. 633–686.
15. *Arendt W., Metafune G., Pallara D.* // J. Math. Anal. and Appl. 2008. V. 338. № 1. P. 505–517.

DIFFERENTIAL PROPERTIES OF SEMIGROUPS AND ESTIMATES OF DISTANCES BETWEEN STATIONARY DISTRIBUTIONS OF DIFFUSIONS

V. I. Bogachev[1,2,3], A. F. Miftakhov[1], S. V. Shaposhnikov[1,2,3]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[3] *St. Tikhons Orthodox University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin October 19, 2018

Received November 16, 2018

We obtain new bounds on the total variation distance and the Kantorovich distance between stationary distributions of diffusion processes in terms of certain distances between diffusion and drift coefficients.

Keywords: diffusion semigroup, stationary distribution, total variation distance, Kantorovich distance.