УДК 514.763.22+517.518.17

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВА КОРНА НА ГРУППАХ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. В. Исангулова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 16.11.2018 г.

Поступило 27.11.2018 г.

Мы строим два аналога неравенства Корна на группах Гейзенберга. Во-первых, оцениваем норму горизонтального дифференциала через его симметричную часть. Во-вторых, рассматриваем неравенство Корна как коэрцитивную оценку для дифференциального оператора, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы изометрий. Для этого строим дифференциальный оператор, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы изометрий на группах Гейзенберга, и доказываем коэрцитивную оценку для него. Также доказываем коэрцитивную оценку для дифференциального оператора, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы конформных отображений на группах Гейзенберга.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, неравенство Корна, интегральное представление, алгебра Ли группы изометрий, коэрцитивная оценка.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854405-409>

Неравенства Корна играют основную роль при доказательстве корректности вариационных задач в теории упругости [1]. Классическое неравенство Корна [2, 3] оценивает норму дифференциала через норму его симметричной части. Множество обобщений неравенств Корна с различными краевыми условиями, условиями роста и на неограниченные области исследованы в литературе, см., например, [4]. Мы будем рассматривать неравенство Корна как коэрцитивную оценку для дифференциального оператора $\mathbb{Q}$ [5, 6]:

$$\|D(F - PF)\|_{p,\Omega} \leq C\|\mathbb{Q}F\|_{p,\Omega}, \quad F \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad p > 1,$$

где $\mathbb{Q}F = \frac{DF + (DF)^t}{2}$, P — это проекция на ядро оператора $\mathbb{Q}$, Ω — область Джона. Отметим, что ядро оператора $\mathbb{Q}$ совпадает с алгеброй Ли группы изометрий и состоит из функций вида $\text{span}\{a + Kx \mid a \in \mathbb{R}^n, K + K^t = 0\}$. Поэтому DPF — это постоянная кососимметрическая матрица. В работе [5] Ю.Г. Решетняк доказал данную коэрцитивную оценку на областях, являющихся конечным объединением звёздных областей. В работе [6] Ю.Г. Решетняком доказаны интегральные представления для специальных дифференциальных операторов на областях Джона, из которых можно вывести коэрцитивную оценку на областях Джона.

Область Ω называется областью Джона $J(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leq \beta$ [7], если существует выделенная точка

$x_0 \in \Omega$ такая, что всякая точка $x \in \Omega$ может быть соединена в Ω с x_0 спрямляемой кривой γ , параметризованной длиной дуги, так, что

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma(l) = x_0, \quad l \leq \beta,$$

$$\text{и } \text{dist}(\gamma(s), \partial\Omega) \geq \frac{\alpha s}{l} \text{ для всех } s \in [0, l].$$

Цель данной работы — установить аналоги неравенства Корна на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ с субримановой метрикой. Квазиконформный анализ на группах Гейзенберга развит в работе А. Кораньи и Х.М. Райманна [8]. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ — это группа Ли, диффеоморфная $\mathbb{R}^{2n+1}$ со следующими базисными левоинвариантными векторными полями:

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + 2x_{i+n} \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},$$

$$X_{i+n} = \frac{\partial}{\partial x_{i+n}} - 2x_i \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$X_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial x_{2n+1}} = -\frac{1}{4}[X_i, X_{i+n}], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подрасслоение $H\mathbb{H}^n$ касательного расслоения, образованное полями $X_1, \dots, X_{2n}$, называется горизонтальным. На $H\mathbb{H}^n$ вводится скалярное произведение, относительно которого поля $X_1, \dots, X_{2n}$ ортонормированы. Метрика Карно—Каратеодори d равна инфимуму длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (абсолютно непрерывная кривая γ горизонтальна, если $\dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n$ почти всюду). В дальнейшем мы будем рассматривать группу Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ с метрикой d и стандартной мерой Лебега в $\mathbb{R}^{2n+1}$. Последняя является биинвариантной

мерой Хаара на $\mathbb{H}^n$. Обозначим символом v размерность по Хаусдорфу относительно метрики Карно—Каратеодори, $v = 2n + 2$.

Рассмотрим отображение $F = (f_1, \dots, f_{2n+1}): U \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Концепция дифференцируемости на группах Гейзенберга и на более общих группах Карно (см. [9]) влечёт, что F сохраняет горизонтальное подрасслоение: $X_i F(x) \in H_{F(x)} \mathbb{H}^n, i = 1, 2, \dots, 2n$ (так называемое условие контактности). В частности, горизонтальный дифференциал $D_h F = (X_i f_j)_{i,j=1,\dots,2n}$ определяет полный дифференциал F . При этом вертикальная координатная функция f_{2n+1} может быть определена через горизонтальные координатные функции $f_1, \dots, f_{2n}$ с точностью до константы. Поэтому нам достаточно рассматривать отображения со значениями в $\mathbb{R}^{2n}$, а не в $\mathbb{H}^n$.

Пространство Соболева $W_p^1(U, \mathbb{R}^{2n}), 1 \leq p \leq \infty$, состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_{2n}): U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, имеющих слабые производные $X_i f_j$ для всех $i, j = 1, 2, \dots, 2n$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^1(U, \mathbb{R}^{2n})} = \|f\|_{p,U} + \sum_{i=1}^{2n} \|X_i f\|_{p,U},$$

где $\|\cdot\|_{p,U}$ — L_p -норма измеримой векторнозначной функции на U .

Мы будем обобщать неравенство Корна в двух направлениях. Во-первых, мы оценим горизонтальный дифференциал через норму его симметричной части. То есть докажем оценки вида $\|D_h w\| \leq C \|S_w\|$ или $\|D_h w\| \leq C(\|w\| + \|S_w\|)$ для $w \in W_p^1(U; \mathbb{R}^{2n})$, где $S_w = \frac{D_h w + (D_h w)^t}{2}$, $D_h w = (X_i w_j)_{i,j=1,\dots,2n}$. Во-вторых, будем искать дифференциальный оператор $\mathcal{Q}$, ядро которого совпадает с горизонтальными координатными функциями отображений из алгебры Ли группы изометрий на $\mathbb{H}^n$, и докажем для него коэрцитивное неравенство $\|D_h w - D_h \Pi w\| \leq C \|\mathcal{Q} w\|$.

В первой теореме мы оцениваем норму дифференциала через его горизонтальную часть.

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{H}^n$ и отображение $w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$.

1. Если w с компактным носителем в Ω , то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_1 \|S_w\|_{p,\Omega}.$$

2. Если Ω — область Джона, то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_2 (\|w\|_{p,\Omega} + \|S_w\|_{p,\Omega}).$$

Здесь константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от отображения w .

Для доказательства теоремы 1 мы применяем работу [10] про коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов на областях Джона групп Карно. Чтобы применить этот результат, оператор должен быть однородным, с постоянными коэффициентами и с конечномерным ядром. Оператор S однородный первого порядка и с постоянными коэффициентами. Необходимо только показать, что его ядро конечномерно.

Предложение 1. Ядро оператора S конечномерно на $\mathbb{H}^n$:

$$\ker S = \{a + Ax + tc - 2\langle c, x \rangle Jx : x = (x, t) \in \mathbb{H}^n, a, c \in \mathbb{R}^{2n}, A + A^t = 0\}.$$

Замечание 1. Отметим, что в отличие от евклидового случая, если $(D_h u - (D_h u)^t)_\Omega = 0$ и Ω — область Джона, то оценка $\|D_h u\|_{p,\Omega} \leq C \|Su\|_{p,\Omega}$ не обязательно выполняется. Действительно, рассмотрим отображение $v(x) = tc - 2\langle c, x \rangle Jx$, $x = (x, t) \in \mathbb{H}^n$, $x \in \mathbb{R}^{2n}, t \in \mathbb{R}, J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $(D_h v - (D_h v)^t)_\Omega = 0$ для всех областей Ω , симметричных относительно вертикальной оси: $(x, t) \in \Omega \Leftrightarrow (-x, t) \in \Omega$. Поскольку $v \in \ker S$, то неравенство $\|D_h v\|_{p,\Omega} \leq C \|Sv\|_{p,\Omega}$ не выполняется.

Чтобы найти дифференциальный оператор $\mathcal{Q}$, ядро которого связано с алгеброй Ли группы изометрий, мы линеаризуем условия ортогональности и контактности. Горизонтальный дифференциал контактного отображения F имеет дополнительную структуру: с точностью до множителя $D_h F(x)$ — симплектическая матрица [8]. Поэтому оператор $\mathcal{Q}$ должен состоять из двух частей. Первая отвечает за ортогональность, а вторая — за симплектичность:

$$\mathcal{Q}w = \begin{pmatrix} Sw \\ Tw \end{pmatrix},$$

$$Tw = \begin{cases} \frac{D_h w + JD_h w J}{2} & \text{для } n > 1, \\ \begin{pmatrix} X_2 X_1 w_2 - 2X_1 X_2 w_2 - X_1^2 w_1 \\ 2X_2 X_1 w_1 - X_1 X_2 w_1 + X_2^2 w_2 \end{pmatrix} & \text{для } n = 1. \end{cases}$$

При $n > 1$ оператор $\mathcal{Q}$ построен в работе [11] для доказательства устойчивости изометрий.

Предложение 2. Ядро оператора $\mathcal{Q}$ конечномерно и совпадает с горизонтальными координатными функциями отображений из алгебры Ли группы изометрий на $\mathbb{H}^n$:

$$\ker \mathcal{Q} = \{a + Kx : x = (x, t) \in \mathbb{H}^n, a \in \mathbb{R}^{2n}, K + K^t = 0, K + JKJ = 0\}.$$

Теорема 2. Пусть $n > 1, 1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}^n$, отображение $w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$. Тогда существует кососимметрическая матрица A такая, что $A + JAJ = 0$ и

$$\|D_h w - A\|_{p,\Omega} \leq C_1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v \|Qw\|_{p,\Omega}.$$

Если дополнительно $(D_h w - (D_h w)^t)_\Omega = 0$, то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^v \|Qw\|_{p,\Omega}.$$

Константы C_1 и C_2 не зависят от отображения w и области Ω .

Теорема 2 доказывается аналогично теореме 1. Поскольку оператор Q однородный с постоянными коэффициентами и с конечномерным ядром, то мы можем применить коэрцитивную оценку работы [10]. Вторая часть теоремы 2 является следствием коэрцитивной оценки первой части.

При построении оператора T отдельно рассматривается случай $n = 1$, так как в этом случае группа симплектических матриц $Sp(2, \mathbb{R})$ совпадает со специальной линейной группой $SL(2, \mathbb{R})$ и условие симплектичности не даёт нужный результат. Действительно, условие

$$0 = D_h u + JD_h u J = \begin{pmatrix} X_1 u_1 - X_2 u_2 & X_2 u_1 + X_1 u_2 \\ X_1 u_2 + X_2 u_1 & X_2 u_2 - X_1 u_1 \end{pmatrix}$$

является условием Коши—Римана, если u не зависит от x_3 .

Построим оператор T , линеаризующий условие контактности при $n = 1$. Пусть гладкое векторное поле $V = w_1 X_1 + w_2 X_2 + p X_3$ порождает контактный поток на односвязной области. Тогда функции w_1 и w_2 определяют горизонтальные производные функции p [8]: $X_1 p = 4w_2$, $X_2 p = -4w_1$. Из [12, теорема 2.9.8] следует, что функции w_1 , w_2 должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} X_1^2(-4w_1) - 2X_1 X_2(4w_2) + X_2 X_1(4w_2) &= 0, \\ X_2^2(4w_2) - 2X_2 X_1(-4w_1) + X_1 X_2(-4w_1) &= 0, \end{aligned}$$

которые и задают T при $n = 1$.

На первой группе Гейзенберга оператор Q определён на функциях класса Соболева W_p^2 . Пространство Соболева $W_p^2(U, \mathbb{R}^{2n})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из отображений $f = (f_1, \dots, f_{2n}): U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, имеющих слабые производные $X_i f_j$, $X_i X_j f_k$ для всех $i, j, k = 1, 2, \dots, 2n$, и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^2(U, \mathbb{R}^{2n})} = \|f\|_{p,U} + \sum_{i=1}^{2n} \|X_i f\|_{p,U} + \sum_{i,j=1}^{2n} \|X_i X_j f\|_{p,U}.$$

Теорема 3. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}^1$, отображение $w \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Тогда существует число $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|D_h w - \gamma J\|_{p,\Omega} \leq C_1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 [\|Sw\|_{p,\Omega} + \text{diam } \Omega \|Tw\|_{p,\Omega}].$$

Если дополнительно $(D_h w - (D_h w)^t)_\Omega = 0$, то

$$\|D_h w\|_{p,\Omega} \leq C_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 [\|Sw\|_{p,\Omega} + \text{diam } \Omega \|Tw\|_{p,\Omega}].$$

Константы C_1 и C_2 не зависят от отображения w и области Ω .

Первая часть доказательства теоремы 3 — это специальное интегральное представление из теоремы 4.

Обозначим

$$\text{Box}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H}^1: \sup\{|\langle \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{x} \rangle_1|, |\langle \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{x} \rangle_2|, \sqrt{|\langle \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{x} \rangle_3|}\} < r\};$$

Теорема 4. Пусть $\kappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$. Существует проектор $\Pi: L_1(\text{Box}(\mathbf{0}, 1); \mathbb{R}^2) \rightarrow \ker Q$ такой, что для всякой функции $w \in C^\infty(\text{Box}(\mathbf{0}, \kappa); \mathbb{R}^2)$ выполняется интегральное представление

$$w(\mathbf{x}) = \Pi w(\mathbf{x}) + \int_{\text{Box}(\mathbf{0}, \kappa)} K(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Qw(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

для всех точек $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, где

$$\begin{aligned} K(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Qw(\mathbf{y}) &= L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) Qw(\mathbf{y}) + M(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) Sw(\mathbf{y}) + \\ &+ N(\mathbf{y}^{-1}\mathbf{x}) Tw(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

с $L(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\text{supp } L(\cdot, \mathbf{x}) \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, \kappa)$ для $\mathbf{x} \in \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$; $M, N \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{\mathbf{0}\})$, $\text{supp } M, \text{supp } N \subseteq \text{Box}(\mathbf{0}, 1)$, и

$$\begin{aligned} |X_{i_1} \dots X_{i_k} M(\mathbf{x})| &\leq C d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-3}, \\ |X_{i_1} \dots X_{i_k} N(\mathbf{x})| &\leq C d(\mathbf{x}, \mathbf{0})^{-k-2} \end{aligned}$$

для всякого мультииндекса $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 основывается на интегральном представлении [10, теорема 3], в котором функция представляется в виде $w = P_1 w + \int K \nabla_{\mathcal{L}}^2 w$, где P_1 — проектор на пространство полиномов первого порядка, $\nabla_{\mathcal{L}}^2 w = \{X_i X_j w_k\}_{i,j,k=1,\dots,2n}$ — все горизонтальные производные второго порядка. Далее мы показываем, что производные второго порядка от w могут быть

вычислены через Qw и что $P_1w = \Pi w + \int K''Qw$, где Π — это проектор на ядро Q .

Вторая часть доказательства теоремы 3 — это получение локальной оценки слабого типа $\|D_h(w - \Pi w)\|_{p, \text{Box}(0,1)} \leq C\|Qw\|_{p, \text{Box}(0,\kappa)}$ для всех $w \in W_p^2(0, \kappa)$. Для этого мы применяем к теореме 4 оценки для аналогов потенциалов Рисса и Михлина (см., например, [10, лемма 3] и [13, теорема 10]).

Последняя часть доказательства теоремы 3 — это перенос локальных оценок на области Джона. Для этого мы используем известную технику (см., например, [14]), которая заключается в хорошем покрытии области Джона шарами. В отличие от известных результатов у нас справа стоит не одна функция, а две: Sw и Tw . Поэтому напрямую их использовать не получится. Также в наших доказательствах мы отслеживаем точную зависимость от коэффициентов Джона α и β .

В евклидовом случае кроме оператора $QF = \frac{DF + (DF)^t}{2}$ рассматривается оператор $Q_1F = \frac{DF + (DF)^t}{2} - \frac{\text{tr}DF}{n}I$, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы конформных преобразований. Коэрцитивная оценка для Q_1 [5] является важной частью доказательства Ю.Г. Решетняка устойчивости в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространства [15].

На группах Гейзенберга мы рассматриваем операторы

$$S_1w = \frac{D_hw + (D_hw)^t}{2} - \frac{\text{tr}D_hw}{2n}I, \\ Q_1w = \begin{pmatrix} S_1w \\ Tw \end{pmatrix}$$

для $w: \Omega \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Мы показываем, что ядро оператора S_1 конечномерно при $n > 1$ и ядро оператора Q_1 совпадает с горизонтальными координатными функциями отображений из алгебры Ли группы конформных преобразований для всех n . Для операторов S_1 и Q_1 выполняются аналоги теорем 1–4.

Теорема 5. Пусть $n > 1$, $1 < p < \infty$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{H}^n$ и отображение $w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n})$.

1. Если w с компактным носителем в Ω , то

$$\|D_hw\|_{p,\Omega} \leq C_1\|S_1w\|_{p,\Omega}.$$

2. Если Ω — область Джона, то

$$\|D_hw\|_{p,\Omega} \leq C_2(\|w\|_{p,\Omega} + \|S_1w\|_{p,\Omega}).$$

Константы C_1 и C_2 не зависят от отображения w и области Ω .

Теорема 6. Пусть $1 < p < \infty$, Ω — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}^n$, Π_1 — проектор на $\ker Q_1$ на Ω . Тогда

$$\|D_hw - D_h\Pi_1w\|_{p,\Omega} \leq C_1\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{v+2} \|Q_1w\|_{p,\Omega} \\ \text{для } w \in W_p^1(\Omega; \mathbb{R}^{2n}), n > 1;$$

$$\|D_hw - D_h\Pi_1w\|_{p,\Omega} \leq C_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^6 \|S_1w\|_{p,\Omega} + \\ + \text{diam}\Omega\|Tw\|_{p,\Omega} \text{ для } w \in W_p^2(\Omega; \mathbb{R}^2), n = 1.$$

Константы C_1 и C_2 не зависят от отображения w и области Ω .

Теорема 7. Пусть $n = 1$, $\kappa = 2\sqrt{6} + \frac{3}{2}$. Существует проектор $\Pi_1: L_1(\text{Box}(0, 1); \mathbb{R}^2) \rightarrow \ker Q_1$ такой, что для всякой функции $w \in C^\infty(\text{Box}(0, \kappa); \mathbb{R}^2)$ выполняется интегральное представление

$$w(x) = \Pi_1w(x) + \int_{\text{Box}(0,\kappa)} K_1(y, x)Q_1w(y)dy,$$

для всех точек $x \in \text{Box}(0, 1)$, где

$$K_1(y, x)Q_1w(y) = L_1(y, x)Q_1w(y) + \\ + M_1(y^{-1}x)S_1w(y) + N_1(y^{-1}x)Tw(y)$$

с $L_1(y, x) \in C^\infty(\mathbb{H} \times \mathbb{H})$, $\text{supp } L(\cdot, x) \subseteq \text{Box}(0, \kappa)$ для $x \in \text{Box}(0, 1)$; $M_1, N_1 \in C^\infty(\mathbb{H} \setminus \{0\})$, $\text{supp } M_1, \text{supp } N_1 \subseteq \text{Box}(0, 1)$, и

$$|X_{i_1} \dots X_{i_k} M_1(x)| \leq Cd(x, 0)^{-k-3}, \\ |X_{i_1} \dots X_{i_k} N_1(x)| \leq Cd(x, 0)^{-k-2}$$

для всякого мультииндекса $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k, k \in \mathbb{N}$.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.3087.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мосолов П.П., Мясников В.П. // Мат. сб. 1972. Т. 88 (130). № 2 (6). С. 256–267.
2. Korn A. // Ann. Faculte Sci. Toulouse. 1908. V. 10. P. 165–269.
3. Korn A. // Bull. Int. Acad. Sci. de Cracovie. 1909. V. 9. P. 705–724.
4. Кондратьев В.А., Олейник О.А. // УМН. 1988. Т. 43 (263). № 5. С. 55–98.
5. Решетняк Ю.Г. // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11. № 2. С. 414–428.

6. Решетняк Ю.Г. // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21. № 6. С. 108–116.
7. John F. // Commun Pure and Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
8. Korányi A., Reimann H.M. // Adv. Math. 1995. V. 111. № 1. P. 1–87.
9. Pansu P. // Acta Math. 1989. V. 129. № 1. P. 1–60.
10. Isangulova D.V., Vodopyanov S.K. // Eurasian Math. J. 2010. V. 1. № 3. P. 58–96.
11. Isangulova D.V., Vodopyanov S.K. // Math. Ann. 2013. V. 355. № 4. P. 1301–1329.
12. Calin O., Chang D.C. Sub-Riemannian Geometry, General Theory and Examples. Encyclopedia // Math. Appl. 2009. V. 126.
13. Водопьянов С.К. // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33. № 2. С. 29–48.
14. Lu G. // Acta Math. Sin. Engl. Ser. 2000. V. 16. № 3. P. 405–444.
15. Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 424 с.

ANALOGUES OF KORN'S INEQUALITY ON HEISENBERG GROUPS

D. V. Isangulova

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak November 16, 2018

Received November 27, 2018

Two analogues of Korn's inequality on Heisenberg groups are constructed. First, the norm of the horizontal differential is estimated in terms of its symmetric part. Second, Korn's inequality is treated as a coercive estimate for a differential operator whose kernel coincides with the Lie algebra of the isometry group. For this purpose, we construct a differential operator whose kernel coincides with the Lie algebra of the isometry group on Heisenberg groups and prove a coercive estimate for this operator. Additionally, a coercive estimate is proved for a differential operator whose kernel coincides with the Lie algebra of the group of conformal mappings on Heisenberg groups.

Keywords: Heisenberg group, Korn's inequality, integral representation, Lie algebra of isometry group, coercive estimate.