ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 485*, *№ 4*, *с. 410–414*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.2+517.4+514.7

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ НА ДВУСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

М. Б. Карманова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 15.11.2018 г.

Поступило 26.11.2018 г.

Для отображений-графиков, построенных по контактным отображениям произвольных двуступенчатых групп Карно, найдены условия корректности постановки задачи о минимальных поверхностях. Введено адекватное понятие приращения функционала (субримановой) площади, доказана дифференцируемость этого функционала и установлены необходимые условия минимальности поверхностей-графиков, в том числе в терминах субримановой средней кривизны.

Ключевые слова: двуступенчатая группа Карно, контактное отображение, внутренняя мера, формула площади, минимальная поверхность.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-565248544410-414

Мы исследуем метрические свойства поверхностей-графиков на произвольных двуступенчатых группах Карно. Группы Карно, как и их обобщения — пространства Карно—Каратеодори, применяются при моделировании и решении разнообразных теоретических и прикладных задач (см., например, комментарии и литературные источники в [1]). В данной работе мы развиваем идеи [2] для одномерного случая на общий, когда график строится по отображению групп Карно глубины 2 без дополнительных ограничений на свойства касательного расслоения в образе. В частности, выводится условие корректности постановки задачи о минимальных поверхностях, а также их базовые свойства. Здесь и далее под термином “минимальная поверхность” будем понимать поверхность с минимальной площадью (подразумевается, что решение соответствующей краевой задачи существует). Подчеркнём, что решаемая задача открывает новые вопросы, специфичные именно для неголономного случая: оказалось, что для корректной постановки задачи нужны определённые ограничения на коммутаторы свойств в прообразе, и, кроме того, определение приращения аргумента функционала площади существенно отличается от классического. А именно, функционал площади меняется неодинаково для координат, стоящих при полях разных степеней, помимо этого, для неголономных отображений понятия “экстремум площади” и “экстремум значений функционала площади” различны, так как во втором случае функционал может принимать некоторое значение, но существование самого отображения, определяющего поверхность с данной площадью, не обязательно (в силу того, что соответствующая задача в частных производных не всегда разрешима).

Прежде всего приведём необходимые определения и факты.

Определение 1 (см., например, [3]). **Двуступенчатой группой Карно** называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т.е. представляется в виде $V = V_1 \oplus V_2, [V_1, V_1] = V_2, [V_1, V_2] = \{0\}$. Если условие $[V_1, V_1] = V_2$ заменить на $[V_1, V_1] \subset V_2$, то $\mathbb{G}$ называется **двуступенчатой нильпотентной градуированной группой (Ли)**. Если базисное поле принадлежит V_1, то его **степень** равна единице, и оно называется **горизонтальным**. В противном случае степень равна двум.

Групповая операция определяется формулой Бейкера—Кэмпбелла—Хаусдорфа.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

Определение 2 (см. также [4]). Пусть $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $w, v \in \mathbb{G}$. Зададим величину $d_2(w, v)$ следующим образом:

$$d_2(w, v) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской Академии наук, *Новосибирск*
E-mail: *maryka@math.nsc.ru*

Множество $\{w \in \mathbb{G}: d_2(w, v) < r\}$ называется шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

Определение 3 [5]. Отображение $\varphi: U \to \tilde{\mathbb{L}}$, $U \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ и $\tilde{\mathbb{L}}$ — произвольные пространства Карно—Каратеодори, *hc*-дифференцируемо в точке $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x: \mathcal{G}^x\mathbb{L} \to \mathcal{G}^{\varphi(x)}\tilde{\mathbb{L}}$ локальных однородных групп, такой, что $d_2(\varphi(w), \mathcal{L}_x\langle w\rangle) = o(d_2(x, w))$, $U \ni w \to x$. *hc*-Дифференциал $\mathcal{L}_x$ в точке x обозначается символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Замечание 1. Нильпотентные градуированные группы $\mathbb{G}$ являются частным случаем пространств Карно—Каратеодори. В каждой точке имеем $\mathcal{G}^x\mathbb{G} = \mathbb{G}$.

Определение 4 (см., например, [5]). Если горизонтальные производные отображения φ существуют всюду, непрерывны и образ горизонтальных полей горизонтален, то φ принадлежит классу C_H^1.

Теорема 1 [5]. *Если φ — C_H^1-отображение группы Карно в нильпотентную градуированную группу, то оно непрерывно hc-дифференцируемо всюду. Кроме того, матрица субриманова дифференциала имеет блочно-диагональную структуру с блоками $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1}$ и $(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2}$.*

Опишем условия решения задачи.

Предположение 1. Будем рассматривать $\varphi \in C_H^1 \cap C^2(\Omega, \tilde{\mathbb{G}})$, где:

1) $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество;

2) $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности N с базисными полями $X_1, \ldots, X_N$, алгеброй Ли векторных полей $V = V_1 \oplus V_2$, где поля $X_1, \ldots, X_{\dim V_1}$ составляют базис V_1, и единицей $\mathbf{0}$; относительно d_2 имеем $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{G} = \nu = \dim V_1 + 2\dim V_2$;

3) $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $\tilde{N}$ с базисными полями $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, алгеброй Ли векторных полей $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, где поля $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}$ составляют базис $\tilde{V}_1$, и единицей $\tilde{\mathbf{0}}$;

4) $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{N}$ с единицей $\hat{\mathbf{0}}$, $\mathbb{G} \cap \tilde{\mathbb{G}} = \hat{\mathbf{0}} = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$;

5) поля $X_1, \ldots, X_N$ и $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ являются базисными для всей группы $\mathbb{U}$.

Замечание 2. Условие 4 предположения 1 означает, что пересечение $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ совпадает с единицей группы $\mathbb{U}$ и обе группы пересекаются по своим единицам.

Определение 5. Отображение-график φ_Γ сопоставляет каждой точке $x \in \Omega$ элемент

$$\varphi_\Gamma(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x)\tilde{X}_j\right)(x),$$

где
$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x)\tilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}}) = \varphi(x).$$

Опишем установленные ранее метрические свойства отображений-графиков. В отличие от евклидова случая дифференциальные свойства не переносятся с отображений на построенные по ним графики. Поэтому для исследований графиков был разработан новый эффективный инструментарий, содержащий, в частности, следующее обобщение субримановой дифференцируемости.

Определение 6. Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — нильпотентные градуированные группы Ли, $\Omega \subset \mathbb{G}$, $\psi: \Omega \to \tilde{\mathbb{G}}$, и функция $\tilde{\mathfrak{d}}: \psi(\Omega) \times \tilde{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}_+$ такова, что $\tilde{\mathfrak{d}}(x, x) = 0$ и $\tilde{\mathfrak{d}}(x, y) = \tilde{\mathfrak{d}}(y, x)$ для всех точек её области определения. Будем говорить, что ψ полиномиально субриманово дифференцируемо, или полиномиально *hc*-дифференцируемо, в (предельной) точке $x \in \Omega$ относительно $\tilde{\mathfrak{d}}$, если существует отображение $\mathcal{L}_x: \mathbb{G} \to \tilde{\mathbb{G}}$ такое, что

1) $\tilde{\mathfrak{d}}(\psi(w), \mathcal{L}_x\langle w\rangle) = o(d_2(x, w))$, $\Omega \ni w \to x$;

2) $\mathcal{L}_x(w) = \theta_{\psi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(w)$, где L_x — оператор с полиномиальными относительно $w_1, \ldots, w_N$ коэффициентами, а $\exp\left(\sum_{j=1}^{N} w_j X_j\right)(x) = w$.

Отображение $\mathcal{L}_x$ называется полиномиальным субримановым дифференциалом, или полиномиальным *hc*-дифференциалом, отображения ψ в точке x.

Теорема 1 (см., например, [4]). *График φ_Γ контактного отображения φ класса C_H^1 непрерывно полиномиально hc-дифференцируем всюду.*

Один из недостатков полученной аппроксимации полиномиальным *hc*-дифференциалом состоит в том, что коэффициенты при полях второй степени сравнимы не с $(d_2)^2$, а с d_2, что существенно затрудняет вывод метрических свойств. Тем не менее при помощи специального внутреннего базиса $\{{}^xX_i, {}^x\tilde{X}_j\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, \tilde{N}$, неголономную структуру прообраза можно согласовать с образом полиномиального субриманова дифференциала в окрестности каждой точки $\varphi_\Gamma(x)$, $x \in \Omega$ (см. [4]). Расстояние ${}^xd_2$ и описание шаров ${}^x\mathrm{Box}_2$ вводятся так же, как и в определении 2.

Определение 7. Значение внутренней меры $\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ для подмножеств $A \subset \varphi_\Gamma(\Omega)$

$$\mathcal{H}_\Gamma^\nu(A) = \omega_{\dim V_1}\omega_{\dim V_2} \times$$
$$\times \lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} {}^{\varphi_\Gamma^{-1}(x_i)}\mathrm{Box}_2(x_i, r_i) \supset A,\ x_i \in A,\ r_i < \delta\right\},$$

где точная нижняя грань берётся по всем покрытиям множества A.

Теорема 2. *Для отображений-графиков справедлива формула площади*

$$\int_\Omega \prod_{j=1}^2 \sqrt{\det(E_{\dim V_j} + (\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_j,V_j}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j,V_j}(x))}\, d\mathcal{H}^\nu(x) =$$
$$= \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y).$$

При исследовании поверхностей в пятимерном пространстве в [6] установлено, что вариация отображения (как аргумента функционала площади) зависит только от горизонтальных координат отображения. Поэтому для каждого $\varphi : \Omega \to \tilde{\mathbb{G}}$ будем строить вариации, определяемые исходным отображением и набором $\xi_k : \Omega \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$. В отличие от пятимерного случая, когда отображение было определено на группе Гейзенберга с единственным нетривиальным коммутатором базисных полей, на произвольных двуступенчатых группах Карно существует более одного не равного нулю коммутатора. Опишем условия корректности постановки задачи, т.е. условия отсутствия ограничений в выборе ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$.

Теорема 3 (см. также [7]). *Для того чтобы не было ограничений в выборе ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$, необходимо, чтобы все коммутаторы первого порядка горизонтальных полей были либо линейно независимы с остальными, либо равны нулю. Иными словами, на $\mathbb{G}$ всякое поле степени 2 должно быть представимо единственным образом через коммутаторы горизонтальных полей.*

Замечание 3. Отличие от [2] состоит в оценке значения полиномиального субриманова дифференциала вариации аргумента на полях степени 2 $\hat{D}\psi_\varepsilon(x)\langle X_k\rangle$, где добавляется суммирование полей степени 2 в образе (ниже считаем, что $i < j$ и $l < m$):

$$\sum_{i,j=1}^{\dim V_1} a_{i,j}^k \sum_{q:\deg\tilde{X}_q=2}\sum_{l,m=1}^{\dim\tilde{V}_1}((\hat{D}\varphi(x))_{li}(\hat{D}\varphi(x))_{mj} -$$
$$- (\hat{D}\varphi(x))_{mi}(\hat{D}\varphi(x))_{lj})c_{lmq}\tilde{X}_q +$$
$$+ 2\varepsilon\sum_{i,j=1}^{\dim V_1} a_{i,j}^k \sum_{q:\deg\tilde{X}_q=2}\sum_{l,m=1}^{\dim\tilde{V}_1}((\hat{D}\varphi(x))_{li} X_j\xi_m(x) -$$
$$- (\hat{D}\varphi(x))_{lj} X_i\xi_m(x))c_{lmq}\tilde{X}_q + \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{\dim V_1} a_{i,j}^k \times$$
$$\times \sum_{q:\deg\tilde{X}_q=2}\sum_{l,m=1}^{\dim\tilde{V}_1}(X_i\xi_l(x)X_j\xi_m(x) -$$
$$- X_i\xi_m(x)X_j\xi_l(x))c_{lmq}\tilde{X}_q =$$
$$= (\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2}(x)\langle X_k\rangle + \varepsilon P_1(x)\langle X_k\rangle + \varepsilon^2 P_2(x)\langle X_k\rangle. \quad (1)$$

Здесь $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — зависящие от $x \in \Omega$ линейные операторы, причём коэффициенты в $P_1(x)$ зависят от первых горизонтальных производных ξ_k в первой степени, а коэффициенты $P_2(x)$ — во второй, $k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$. Подчеркнём [2], что зависящий от $x \in \Omega$ горизонтальный гомоморфимзм $\hat{D}\psi_\varepsilon(x)$ существует, тогда как отображение ψ_ε, субриманов дифференциал которого совпадает с $\hat{D}\psi_\varepsilon(x)$, может не существовать.

Определение 8. Функционалом площади, действующим на классе графиков, построенных по контактным отображениям класса $C_H^1 \cap C^2$, называется выражение

$$S(\varphi) =$$
$$= \int_\Omega \prod_{j=1}^2 \sqrt{\det(E_{\dim V_j} + (\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_j,V_j}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_j,V_j}(x))}\, d\mathcal{H}^\nu(x). \quad (2)$$

Приращение функционала площади на элементе $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\dim\tilde{V}_1})$ будет равно $S(\hat{D}\psi_\varepsilon) - S(\varphi)$, где величина $S(\hat{D}\psi_\varepsilon)$ определяется как

$$\int_\Omega \sqrt{\det(E_{\dim V_1} + ((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1} + \varepsilon D_{V_1}\xi)^*((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1} + \varepsilon D_{V_1}\xi))} \times$$
$$\times \sqrt{\det(E_{\dim V_2} + \Delta^2)}\, d\mathcal{H}^\nu,$$

символ D_{V_1} обозначает дифференцирование только по горизонтальным полям и

$$\Delta^2 = ((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)^*((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2).$$

Определение 9. Для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\dim\tilde{V}_1})$ положим $\|\xi\|_m$ и $\|\xi\|_{H,m}$ равными

$$\|\xi\|_m = \left(\int_\Omega \sum_{k=1}^{\dim\tilde{V}_1}|\xi_k(x)|^m + \sum_{\beta:|\beta|=m}|\hat{\xi}(x)^\beta|\, d\mathcal{H}^\nu(x)\right)^{\frac{1}{m}},$$
$$\|\xi\|_{H,m} = \left(\int_\Omega \sum_{\beta:|\beta|=m}|\hat{\xi}(x)^\beta|\, d\mathcal{H}^\nu(x)\right)^{\frac{1}{m}},$$

где вектор-функция $\hat{\xi}$ состоит из элементов $X_1\xi_1, \ldots, X_1\xi_{\dim\tilde{V}_1}, X_2\xi_1, \ldots, X_{\dim V_1}\xi_{\dim\tilde{V}_1}$.

Теорема 4. *Функционал площади* (2) *является дифференцируемым относительно нормы* $\|\cdot\|_{\max\{4\dim V_1, 8\dim V_2\}}$. *Если* Ω *горизонтально достижима, то* $\|\cdot\|_{H,\max\{4\dim V_1, 8\dim V_2\}}$ *является нормой и* (2) *дифференцируем относительно неё.*

Замечание 4. Для оценки нормы достаточно записать вторую производную в произвольной точке ε каждого из определителей матриц, входящих в запись приращения функционала, и далее применить стандартные аргументы.

Следующий результат — необходимое условие минимальности поверхности-графика — является основным.

Теорема 5. *Для того чтобы функционал площади достигал минимума на поверхности-графике, определяемой контактным отображением* φ *и горизонтальным гомоморфизмом* $\hat{D}\varphi$, *среди значений, определяемых горизонтальными гомоморфизмами вида* $\hat{D}\psi_\varepsilon$, *необходимо, чтобы был равен нулю интеграл*

$$\int_\Omega \mathcal{D}_1(\varphi,\xi)\frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_2}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_2,V_2}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2})}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_1,V_1}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1})}}+$$
$$+\mathcal{D}_2(\varphi,\xi)\frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_1}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_1,V_1}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1})}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_2}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_2,V_2}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2})}}\,d\mathcal{H}^\nu,$$

где

$$\mathcal{D}_1(\varphi,\xi,x)=\sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1}\langle (D_{V_1}\xi)_i(x),$$
$$((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1})_j(x)\rangle(E_{\dim V_1}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_1,V_1}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1}(x))_{ij}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1}\langle((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1})_i(x),\,(D_{V_1}\xi)_j(x)\rangle\times$$
$$\times(E_{\dim V_1}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_1,V_1}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1}(x))_{ij},$$

кроме того,

$$\mathcal{D}_2(\varphi,\xi,x)=\sum_{i=1}^{\dim V_2}\sum_{j=1}^{\dim V_2}\langle (P_1)_i(x),$$
$$((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2})_j(x)\rangle(E_{\dim V_2}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_2,V_2}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2}(x))_{ij}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\dim V_2}\sum_{j=1}^{\dim V_2}\langle((\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2})_i(x),\,(P_1)_j(x)\rangle\times$$
$$\times(E_{\dim V_2}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_2,V_2}(x)(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2}(x))_{ij},$$

причём $i<j$, P_1 — *матрица оператора из* (1), $(A)_i$ *обозначает столбец матрицы* A *с номером* i, *а* A_{ij} *обозначает алгебраическое дополнение.*

Далее предположим, что $\Omega\subset\mathbb{G}$ — область с достаточно гладкой границей и $\xi|_{\partial\Omega}\equiv 0$. Напомним, что $(D_{V_1}\xi)_i=(X_i\xi_1,\ldots,X_i\xi_{\dim\tilde{V}_1})$, а $(P_1)_k(x)=(p_1^k(x),\ldots$ $\ldots,p^k_{\dim\tilde{V}_2}(x))$, где

$$p_q^k(x)=2\sum_{i,j=1}^{\dim V_1}a^k_{i,j}\times$$
$$\times\sum_{1\le l<m\le\dim\tilde{V}_1}(X_i\varphi_l(x)X_j\xi_m(x)-X_j\varphi_l(x)X_i\xi_m(x))c_{lmq},$$
$$q=1,\,2,\,\ldots,\,\dim\tilde{V}_2.$$

Из этих выражений и с помощью интегрирования по частям и стандартных аргументов получаем следующее условие.

Теорема 6. *Для того чтобы функционал площади достигал минимума на поверхности-графике, определяемой контактным* C^2*-отображением* φ *и горизонтальным гомоморфизмом* $\hat{D}\varphi$, *среди значений, определяемых горизонтальными гомоморфизмами вида* $\hat{D}\psi_\varepsilon$, *необходимо, чтобы выполнялось* $H_m^{SR}\equiv 0$, $m=1,\ldots$ $\ldots,\dim\tilde{V}_1$, *где*

$$H_m^{SR}(x)=\sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1}X_i\langle X_j\varphi_m(x)\times$$
$$\times(E+\hat{D}_H\varphi(x)^*\hat{D}_H\varphi(x))_{ij}\mathcal{F}(\varphi)\rangle+$$
$$+\sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1}X_i\langle X_j\varphi_m(x)(E+\hat{D}_H\varphi(x)^*\times$$
$$\times\hat{D}_H\varphi(x))_{ji}\mathcal{F}(\varphi)\rangle+2\sum_{\deg X_k=2}\sum_{i,j=1}^{\dim V_1}\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{q=1}^{\dim\tilde{V}_2}a^k_{i,j}c_{lmq}\times$$
$$\times(X_j\langle X_i\varphi_l(x)(\hat{D}\varphi(x))_{q,k}/\mathcal{F}(\varphi)\rangle-$$
$$-X_i\langle X_j\varphi_l(x)(\hat{D}\varphi(x))_{q,k}/\mathcal{F}(\varphi)\rangle)+$$
$$+2\sum_{\deg X_k=2}\sum_{i,j=1}^{\dim V_1}\sum_{l=m+1}^{\dim\tilde{V}_1}\sum_{q=1}^{\dim\tilde{V}_2}a^k_{i,j}c_{mlq}\times$$
$$\times(X_i\langle X_j\varphi_l(x)(\hat{D}\varphi(x))_{q,k}/\mathcal{F}(\varphi)\rangle-$$
$$-X_j\langle X_i\varphi_l(x)(\hat{D}\varphi(x))_{\tilde{n}+1,k}/\mathcal{F}(\varphi)\rangle),\quad i<j,$$
$$\mathcal{F}(\varphi)=\frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_2}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_2,V_2}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_2,V_2})}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1}+(\hat{D}\varphi)^*_{\tilde{V}_1,V_1}(\hat{D}\varphi)_{\tilde{V}_1,V_1})}}.$$

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2, проект № 0314–2016–0006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karmanova M.*, *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot—Carathéodory Spaces, Differentiability, Coarea and

Area Formulas. In: Analysis and Mathematical Physics. Basel: Birkhäuser, 2009. P. 233–335.
2. *Карманова М.Б.* Минимальные поверхности-графики на произвольных двуступенчатых группах Карно // Изв. вузов. Математика. 2019.
3. *Folland G.B.*, *Stein E.M.* Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
4. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 232–254.
5. *Vodopyanov S.* // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.
6. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 4. С. 834–857.
7. *Карманова М.Б.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 16–20.

ON MINIMAL SURFACES ON TWO-STEP CARNOT GROUPS

M. B. Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak November 15, 2018

Received November 26, 2018

For graph mappings constructed from contact mappings of arbitrary two-step Carnot groups, conditions for the correct formulation of minimal surfaces' problem are found. A suitable notion of the (sub-Riemannian) area functional increment is introduced, differentiability of this functional is proved, and necessary minimality conditions are deduced. They are also expressed in terms of sub-Riemaninan mean curvature.

Keywords: two-step Carnot group, contact mapping, intrinsic measure, area formula, minimal surface.