УДК 517.938

ВНЕШНИЙ БИЛЛИАРД ВНЕ ПРАВИЛЬНОГО ДВЕНАДЦАТИУГОЛЬНИКА

Ф. Д. Рухович

Представлено академиком РАН А.Л. Семеновым 15.11.2018 г.

Поступило 15.11.2018 г.

Доказано существование аperiодической орбиты для внешнего бильярда вне правильного двенадцатиугольника. Показано, что почти все траектории такого внешнего бильярда являются периодическими; явно выписаны все возможные периоды. При доказательстве теорем были использованы доказательные компьютерные вычисления.

Ключевые слова: внешние бильярды, ренормализационная схема, кусочная изометрия, динамические системы.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854415-421>

Пусть γ — плоская выпуклая фигура, а p — точка вне её. Проведём правую относительно p касательную к γ ; определим $T(p)$ как точку, симметричную p относительно точки касания. В случае если существуют две или более точки правого касания, будем говорить, что $T(p)$ не определено. Отображение T называется внешним бильярдом; фигура γ называется столом внешнего бильярда. Внешние бильярды были введены в 1950-х годах (см. обзоры [5–7], а также [2]). Нас интересуют классические вопросы о внешнем бильярде вне правильного n -угольника: существование аperiодической орбиты и мера периодических точек.

В случаях $n = 3, 4, 6$ все точки являются либо периодическими, либо граничными, т.е. $T^k(p)$ не определено для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ [3]; аperiодические точки, т.е. точки с бесконечной в две стороны неperiодической траекторией, в этих случаях отсутствуют. По мнению Р. Шварца [7], следующими по сложности являются случаи $n = 5, 10, 8, 12$; в этих случаях для внешнего бильярда удаётся построить так называемую ренормализационную схему (определение см. ниже), которая, как пишет Шварц, “позволяет дать (как минимум в принципе) полное описание того, что происходит”. Случай $n = 5$ был исследован в [3, 4, 6]; для этого случая доказано существование аperiодической точки и что почти все точки — периодические. Случай $n = 10$ похож на случай $n = 5$ (см. [4]), и для него могут быть получены схожие с [3, 4, 6] результаты. Случай $n = 8$ исследовался в монографиях [7, 8];

наличие аperiодических точек и полнота периодических точек для этого случая были установлены в работе автора [2]. Данная работа посвящена завершающему программу Шварца случаю $n = 12$. В работе использованы доказательные компьютерные вычисления; отметим, что для предшествующих случаев можно было обойтись без компьютера. Для других случаев рядом авторов проводились компьютерные эксперименты (см. [6], а также [7] для случая $n = 7$), на основании которых можно предположить, что и для них существуют аperiодические точки и периодические точки образуют множество полной меры.

Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для внешнего бильярда вне правильного двенадцатиугольника существует аperiодическая точка.*

Теорема 2. *В случае внешнего бильярда вне правильного двенадцатиугольника периодические точки образуют вне стола множество полной меры.*

Введём обозначения, которые нам понадобятся для формулировки следующей теоремы.

Пусть

$$M_{88} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 20 & 50 & 26 & 50 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 20 & 50 & 26 & 50 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 42 & 107 & 74 & 145 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 20 & 50 & 48 & 94 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 18 & 13 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный Московской обл.
E-mail: dprpavlin@gmail.com

$$M_{68} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 18 & 13 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 14 & 29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{66} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначив верхним индексом $\top$ транспонирование строчки, введём два множества столбцов F, G . Положим

$$\begin{aligned} F := & \{(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, \\ & (9 \ 2 \ 5 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, (6 \ 4 \ 10 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, \\ & (0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^\top, (24 \ 24 \ 120 \ 102 \ 0 \ 0 \ 18 \ 0)^\top, \\ & (48 \ 48 \ 156 \ 108 \ 0 \ 0 \ 24 \ 0)^\top, (4 \ 4 \ 9 \ 4 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^\top, \\ & (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^\top, \\ & (2 \ 2 \ 4 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 7 \ 8 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^\top, \\ & (6 \ 6 \ 13 \ 6 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0)^\top\}, \\ G := & \{(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 0 \ 24 \ 36 \ 0)^\top, \\ & (0 \ 0 \ 0 \ 18 \ 36 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0)^\top, \\ & (0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0)^\top, (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 0)^\top\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$H := \{M_{66}^k M_{68} M_{88}^n f \mid f \in F, k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{M_{66}^k g \mid g \in G, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

и

$$B := \left\{ 12 \cdot \frac{(1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)h}{\text{НОД}(12, (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6)h)} \mid h \in H \right\}.$$

Теорема 3. *Множество всевозможных периодов точек для внешнего бильярда вне правильного двенадцатиугольника есть объединение множеств B и $\{2 \cdot b \mid b \in B, b \text{ нечётно}\}$.*

В доказательстве всех трёх теорем необходимы компьютерные вычисления. Мы вводим систему координат на плоскости таким образом, что вершины двенадцатиугольника имеют координаты, лежащие в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. В силу этого все точки (в частности, вершины всех многоугольников), построение которых явно описано далее, обладают лежащими в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ координатами, которые могут быть явно вычислены, “вручную” или с помощью компьютера. Эти обстоятельства в совокупности с наличием в языке Python типа данных, хранящего целые числа произвольной длины, позволяют проводить необходимые компьютерные вычисления абсолютно точно (см. [1]).

Одним из ключевых для нашего исследования понятий является преобразование первого возвра-

щения. А именно пусть V — некоторое произвольное множество, $U \subset V$ — некоторое его подмножество, а $f: V \rightarrow V$ есть некоторое преобразование множества V . Тогда преобразование первого возвращения $f_U: U \rightarrow U$ устроено следующим образом. Пусть $p \in U$. Будем последовательно применять к точке p преобразование f до тех пор, пока очередная точка $q = f^k(p)$ не окажется снова внутри области U . Такая точка q и будет по определению $f_U(p)$. В случае если возвращения не произойдёт никогда, $f_U(p)$ не определено.

В данной работе V есть некоторый угол вне стола γ , U, U' суть невыпуклые многоугольники, причём $U' \subset U \subset V$, а $f = T'$ есть некоторое преобразование, делящее V пятью лучами на шесть выпуклых фигур, для каждой из которых f есть поворот на некий кратный $\frac{\pi}{6}$ угол.

Преобразования f_U и $f_{U'}$ вычисляются с помощью описанного в [1] компьютерного алгоритма поиска преобразования первого возвращения, который принимает на вход многоугольник S и возвращает две последовательности многоугольников $S_1 = (S_{11}, S_{12}, \dots, S_{1k})$ и $S_2 = (S_{21}, S_{22}, \dots, S_{2k})$, такие что S_1 и S_2 суть два разбиения фигуры S на k многоугольников, причём $\forall i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq k: T'_S(\text{int}(S_{1i}))$ суть вращение, такое что $T'_S(\text{int}(S_{1i})) = \text{int}(S_{2i})$; для точек, принадлежащих ∂S_{1i} , T'_S не определено.

Чтобы доказать наличие аperiodической точки, мы применим схему, которую назовём “ренормализационная схема по Табачникову”. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$, и для (возможно, почти) всех точек X определено преобразование $f: X \rightarrow X$; тогда говорят, что для динамической системы (X, f) существует ренормализационная схема, если существует фигура $X' \subset X$ преобразования $\Gamma: X \rightarrow X'$, такое что $\Gamma \circ f = f' \circ \Gamma$, где $f': X' \rightarrow X'$ есть преобразование первого возвращения на X' относительно f (подробнее см. раздел про правильный пятиугольник в [3]; главу 6 в [7], а также лемму 2).

Согласно этой схеме с помощью компьютера находится некоторая область $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ и гомотетичная ей подобласть $U' \subset U$ таким образом, чтобы преобразование первого возвращения $T_{U'}(p)$ для U' соответствовало преобразованию первого возвращения $T_U(p)$ для U при гомотетии.

Оказывается, области U , U' могут быть выбраны так, что при этом все неграничные точки U , не лежащие на траекториях первого возвращения в U' , являются периодическими и разбиваются на конечное число периодических фигур, т.е. фигур (а именно многоугольников), внутренние точки которых периодические, а точки на границах — граничные (в ранее указанном смысле). Такая ренормализационная схема даёт возможность описать все

периодические фигуры U как множество фигур вида $R^m(T^k(\Gamma^l(\beta)))$, где β — одна из периодических фигур, лежащих в $U \setminus U'$, Γ — гомотетия, такая что $\Gamma(U) = U'$, R есть поворот на $\frac{\pi}{6}$ против часовой стрелки вокруг центра стола γ , а $k, l, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, их периоды с помощью символической динамики, а также найти аperiodические точки. Описание же периодических фигур, находящихся за пределами U , производится с помощью ещё одной ренормализационной схемы.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассмотрим рис. 1 и изображённый на нём правильный двенадцатиугольник $\gamma = A_0 A_1 \dots A_{11}$. Введём систему координат таким образом, что координаты всех точек лежат в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Пусть l_i есть прямая, проходящая через вершины A_i и $A_{(i+1) \bmod 12}$; здесь и далее $i = 0, 1, \dots, 11$, если не оговорено иное. Пусть точка C_i есть точка пересечения прямых $l_{(i-2) \bmod 12}$ и $l_{(i+2) \bmod 12}$. Пусть $\gamma^i = A_i^i A_1^i \dots A_{11}^i$ — это открытый многоугольник, симметричный столу γ относительно точки C_i . Заметим, что $\forall i: A_i^i = A_6^{(i+1) \bmod 12}$. Это означает, что многоугольники γ^i ограничивают невыпуклый многоугольник Z , инвариантный относительно преобразования T .

Рис. 1. Первая инвариантная компонента [3] — фигура Z .

Также введём “классическое” для внешнего билиарда (см., например, [4]) кодирование орбит. Пусть V_i есть угол $A_{(i-1) \bmod 12} A_i A_{(i-2) \bmod 12}$. Пусть p — периодическая или аperiodическая точка вне стола γ . Тогда код $\rho(p)$ есть бесконечная в обе стороны последовательность (u_n) , $n \in \mathbb{Z}$, такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}: T^n(p) \in \text{int}(V_{u_n})$. Аналогичным образом можно (но не необходимо для данного исследования) ввести и код для граничных точек (там, где они определены; детали см. в [1]).

Преобразование T инвариантно относительно поворота на угол $z \frac{\pi}{6}$, $z \in \mathbb{Z}$, вокруг центра многоугольника γ . отождествим точки относительно такого поворота. Как следствие, изучаемую область можно ограничить до угла $A_6^3 A_1 A_2$, на котором преобразование внешнего билиарда T индуцирует преобразование T' . Фигура же Z ограничивается до фигуры Z' , являющейся шестиугольником $A_1 A_2^3 A_3^3 A_4^3 A_5^3 A_6^3$. Согласно рис. 1, Z' похож на “ракету” с “основанием” в многоугольнике γ^3 ; будем называть “ракетами” шестиугольники, подобные Z' .

Опишем преобразование T' (см. рис. 2). Пусть точки $P_1, P_2, \dots, P_5$ суть точки пересечений луча $A_0 A_1$ с лучами $A_2 A_1, A_3 A_2, \dots, A_6 A_5$ соответственно, а точки $Q_2, Q_3, \dots, Q_6$ суть точки пересечений луча $A_1 A_2$ с лучами $A_3 A_2, A_4 A_3, \dots, A_7 A_6$ соответственно. Пусть фигуры $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ есть фигуры, на которые лучи $A_3 A_2, A_4 A_3, \dots, A_7 A_6$ разбивают угол $P_2 P_1 Q_2$ (см. рис. 2); а именно α_1 есть треугольник $P_1 P_2 Q_2$, $\alpha_j, j = 2, 3, 4$, есть четырёхугольник $P_j Q_j Q_{j+1} P_{j+1}$, α_5 есть “бесконечный многоугольник”, ограниченный лучом $A_6^3 A_7^3$,

отрезками $A_6^3 Q_5 = P_5 Q_5$ и $Q_5 Q_6$, а также лучом $A_1^3 A_0^3$. Пусть также точки $O_1, O_2, \dots, O_5$ суть точки пересечения биссектрисы угла $P_2 P_1 Q_2$ с биссектрисами углов $P_1 A_2 Q_2, P_2 A_3 Q_3, \dots, P_5 A_6 Q_6$ соответственно. Тогда индуцированное преобразование T' есть кусочно-аффинное преобразование угла $P_2 P_1 Q_2$, устроенное таким образом, что для фигуры $\alpha_j, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$, T' есть поворот на угол $\frac{(6-j)\pi}{6}$ против часовой стрелки вокруг точки O_j , а для фигуры-угла α_6 T' есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{A_1^3 A_7^3}$. Для удобства будем считать, что на границах фигур $\alpha_j, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$, преобразование T' не определено.

Введём также “индуцированный” код ρ' для преобразования T' . Пусть $p \in Z'$ — периодическая или аperiodическая точка. Тогда $\rho'(p)$ есть бесконечная в обе стороны последовательность (u'_n) , $n \in \mathbb{Z}$, такая, что $\forall n \in \mathbb{Z}: T'^n(p) \in (\alpha_{u'_n})$. Аналогичным образом можно определить “индуцированный” код и для граничных точек. Далее под словом “код” мы будем подразумевать именно ρ' , если не указано обратное.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРВОГО ВОЗВРАЩЕНИЯ

Периодической компонентой называется максимальное по включению связное множество периодических точек с одинаковым кодом. Аналогичным образом можно ввести и аperiodические компоненты; однако из структуры периодических компонент следует

Теорема 4. *Две различные точки, не являющиеся граничными, имеют одинаковый код, если и только*

Рис. 2. Основные обозначения и преобразование T' .

если они периодичны и принадлежат одной периодической компоненте. Другими словами, аperiodические точки имеют попарно различные коды.

Для любой заданной периодической точки p , лежащей внутри угла $P_2P_1Q_2$, с координатами в $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ можно описать её периодическую компоненту как геометрическую фигуру с помощью компьютерного алгоритма (см. алгоритм 1 в [1]). В частности, можно получить, что периодическими фигурами с кодами $\dots jji \dots, j = 1, 2, 3, 4$, являются фигуры W_j , изображённые на рис. 3; так же можно найти и другие периодические компоненты (некоторые изображены на всё том же рис. 3). В случае двенадцатиугольника, в отличие от случаев $n = 5, 8, 10$, среди периодических компонент встречаются неправильные многоугольники.

2.1. Ренормализационная схема по Табачникову

Определение 1. Пусть некоторая фигура S лежит внутри угла $P_2P_1Q_2$. Тогда определим преобразование T'_S первого возвращения (first return map) на S относительно преобразования T' таким образом, что $\forall s \in S: T'_S(s) := T''^{n_s}(s)$, где n_s есть минимальное целое положительное число такое, что $T''^{n_s}(s) \in S$. Если такого n_s не существует для некоторой точки $s \in S$, то для этой точки $T'_S(s)$ не определено.

Автором реализован алгоритм, который позволяет для заданного многоугольника S найти преобразование первого возвращения T'_S в виде двух разбиений S на открытые многоугольники $\{S_0^1, S_1^1, \dots, S_{l-1}^1\}$,

Рис. 3. Базовые периодические компоненты.

$\{S_0^2, S_1^2, \dots, S_{l-1}^2\}$, так что $\forall i \in [0, l)$ существует движение f_i , такое что $f_i(S_i^1) = S_i^2$, причём $\forall p \in S_i^1: T'_S(p) = f_i(p)$, а для любой точки $q \in \partial(S_i^1): T'_S(q)$ не определено (детали см. в [1, алгоритм 2, с. 14]).

Рассмотрим преобразование Γ_1 , являющееся сжатием с центром в точке $A_1 = P_1$ и переводящее O_5 в O_1 . Пусть $Z'_1 := \Gamma_1(Z')$. По аналогии с [2] ожидается, что $T'_{Z'_1}$ будет похож на T' для Z' . Наш алгоритм сообщает, что $T'_{Z'_1}$ разбивает Z'_1 на десять многоугольников, четыре из которых суть треугольники, пять — четырёхугольники, а один — неравносторонний шестиугольник. Чтобы описать самоподобие, введём сжатие Γ_4 с центром в той же A_1 , но переводящее O_5 в O_4 ; пусть $Z'_4 = \Gamma_4(Z')$, а $Z'_{14} = \Gamma_1(Z'_4)$.

Лемма 1. Пусть $S = Z'_4$ или $S = Z'_{14}$. Тогда T'_S разбивает S на восемь многоугольников, два из которых — треугольники, а остальные шесть — четырёхугольники, причём один из этих четырёхугольников невыпуклый. Более того, разбиение Z'_{14} можно получить из разбиения Z'_4 , применив к многоугольникам преобразование Γ_1 .

Лемма 2. Пусть $p_4 \in \text{int}(Z'_4)$, а $p_{14} := \Gamma_1(p_4)$. Тогда:

1. $T'_{Z'_4}(p_4)$ определено, если и только если $T'_{Z'_{14}}(p_{14})$ определено;
2. Если $T'_{Z'_4}(p_4)$ определено, то $\Gamma_1(T'_{Z'_4}(p_4)) = T'_{Z'_{14}}(p_{14}) = T'_{Z'_{14}}(\Gamma_1(p_4))$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

С помощью найденного в прошлом разделе самоподобия докажем существование аperiodической траектории, т.е. теорему 1. Для этого рассмотрим (см. рис. 4) “ракету” $X := (T')^{-2}(Z'_{14})$. Отметим, что X ограничена фигурами W_3, W_2 и $(T')^{-2}(\Gamma_1(W_4))$, т.е. тремя периодическими фигурами. Очевидно, что T'_X также “подобно” $T'_{Z'_4}$, как и $T'_{Z'_{14}}$. Пусть Γ_X есть аффинное преобразование, переводящее Z_4 в X с сохранением ориентации. Рассмотрим бесконечную последовательность фигур $(Y_0, Y_1, Y_2, \dots)$, где:

$$Y_0 = W_3, \quad Y_1 = W_2, \quad Y_2 = (T')^{-2}(\Gamma_1(W_4));$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3: Y_n = \Gamma_X(Y_{n-3}).$$

Легко показать, что все фигуры Y_n являются периодическими, причём так как $T'_{Z'_4}(X)$ не пересекается с X , то относительно $T'_{Z'_4}$ период Y_n как минимум в два раза больше, нежели период Y_{n-3} для любого $n \geq 3$. Тогда предельная точка y последовательности (Y_n) есть аperiodическая точка и теорема 1 доказана.

Рис. 4. Фигура X и начало последовательности Y .

Доказательства теорем 2 и 3 основаны на следующих леммах.

Лемма 3. Пусть $S = Z'_4$ или $S = Z'_{14}$. По лемме 1 преобразование первого возвращения T'_S разбивает S на восемь фигур; пусть это $S_1, S_2, \dots, S_8$, а $t_1, t_2, \dots, t_8$ — их “времена” первого возвращения в S . Тогда в Z' существует n периодических фигур $R_1, \dots, R_n$ с периодами $p_1, p_2, \dots, p_n$ относительно T' таких, что существует разбиение

$$Z' = \left(\bigcup_{i=1}^8 \bigcup_{j=0}^{t_i-1} T'^j(S_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=0}^{p_i-1} T'^j(R_i) \right).$$

При этом $n = 7$ при $S = Z'_4$ и $n = 20$ при $S = Z'_{14}$.

Лемма 4. Пусть S есть произвольный многоугольник. Рассмотрим последовательность разбиений S на конечное число многоугольников, устроенную следующим образом:

1. Каждый многоугольник покрашен в зелёный или красный цвет;
2. Каждое следующее разбиение может быть получено из предыдущего путём разбиения некоторых зелёных многоугольников на некоторое количество красных и зелёных многоугольников, без изменения красных многоугольников;

3. Существуют вещественное число $\varepsilon > 0$ и целое положительное число k такое, что для любого целого положительного j и любого зелёного многоугольника U , участвующего в j -м разбиении, гарантируется, что в $(j + k)$ -м разбиении красные фигуры, лежащие внутри U , обладают суммарной площадью, не меньшей, чем εA , где A есть площадь фигуры U .

Тогда участвующие в разбиениях красные фигуры образуют в S множество полной меры.

Леммы 2, 3 (требующие компьютерного доказательства) и 4 позволяют доказать теоремы 2 и 3 для фигуры Z' . Доказать эти теоремы для всего угла $P_2P_1Q_2$ и, значит, для всей плоскости позволяет следующая лемма, похожая на лемму 10 в [2]. Пусть T_6 есть преобразование первого возвращения T' для угла α_6 . Пусть преобразование H есть параллельный перенос, такой что $H(A_1) = A_1^3$.

Лемма 5. Пусть $x \in \text{int}(\angle P_2P_1Q_2)$. Тогда:

1. $T'(x)$ определено, если и только если $T_6(H(x))$ определено;
2. Если $T'(x)$ определено, то $H(T'(x)) = T_6(H(x))$.

Источник финансирования. Работа поддержана грантом РНФ № 17–11–01337.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rukhovich F. Outer Billiards Outside Regular Dodecagon: Computer Proof of Periodicity of Almost All Orbits and Existence of an Aperiodic Point. arXiv:1809.03791.
2. Rukhovich F. Outer Billiards. arXiv:1505.06332.
3. Табачников С. Внешние бильярды // УМН. 1993. Т. 48. В. 6 (294). С. 75–102.
4. Bedaride N., Cassaigne J. Outer Billiards Outside Regular Polygons // J. London Math. Soc. 2011. V. 84. Iss. 2. P. 303–324. <https://doi.org/10.1112/jlms/jdr010>, arXiv:0912.0563.
5. Tabachnikov S. Geometry and Billiards. Student Mathematical Library. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2005. V. 30.
6. Tabachnikov S. On the Dual Billiard Problem // Adv. Math. 1995. V. 115 (2). P. 221–249.
7. Schwartz R.E. Outer Billiards, Arithmetic Graph and the Octagon. arXiv:1006.2782, 2010.
8. Schwartz R.E. The Octagonal PETs // Math. Surv. and Monogr. 2014. V. 197.

OUTER BILLIARDS OUTSIDE A REGULAR DODECAGON

F. D. Rukhovich

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A.L. Semenov November 15, 2018

Received November 15, 2018

The existence of an aperiodic orbit for an outer billiard outside a regular dodecagon is proved. It is shown that almost all orbits of such an outer billiard are periodic, and all possible periods are explicitly listed. The proofs of the theorems make use of computer calculations.

Keywords: outer billiards, renormalization scheme, piecewise isometry, dynamical systems.