

УДК 532.51:532.5.011

ОБ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ И ВНУТРЕННИМИ ВОЛНАМИ

В. Г. Байдулов^{1,2,*}, П. А. Лесовский¹

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлёвым 17.08.2018 г.

Поступило 23.08.2018 г.

Для группы симметрии уравнений внутренних волн определено механическое содержание инвариантов и преобразований симметрии. Проведённое сопоставление позволило построить выражения для аналогов импульса, момента импульса, энергии, преобразований Лоренца и других характеристик СТО и электродинамики. Определены выражения для функции Лагранжа и выведены законы сохранения. Аналогия проведена как в случае отсутствия источников и токов в уравнениях Максвелла, так и при их наличии.

Ключевые слова: внутренние волны, инварианты, группы Ли, преобразования Лоренца.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854428-433>

В присутствии силы тяжести в стратифицированной по плотности жидкости возникают внутренние гравитационные волны. Их свойства исследованы достаточно подробно разнообразными теоретическими методами: известны уравнения, описывающие их динамику, дисперсионное соотношение и кинематика. Предлагается инвариантное описание внутренних волн, в основании которого лежит аналогия с электромагнитными волнами. Аппарат теории непрерывных групп позволил определить характеристики волн, остающиеся неизменными при смене частоты колебаний, построить закон преобразования скоростей, вывести новые законы сохранения.

ГРУППА СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Важное значение в волновых процессах в толще неоднородной несжимаемой жидкости [1] играет невозмущённое распределение стратифицирующей компоненты $s_0(z)$, определяющее профили плотности ρ и частоты собственных колебаний (плывучести) $N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho}{dz}$ (ось z ориентирована против направления действия силы тяжести). В приближении Буссинеска линеаризованная форма уравнений несжимаемой стратифицированной жидкости принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P + \mathbf{g}s, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{w}{\Lambda}, \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — скорость, P и s — динамические составляющие давления и солёности соответственно, $\Lambda = g/N^2$ — масштаб стратификации.

Система (1) допускает бесконечномерную группу симметрии с генераторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, & X_2 &= \partial_x, & X_3 &= \partial_y, & X_4 &= \partial_z, \\ X_5 &= \rho g z \partial_p - \partial_s, & X_6 &= y \partial_x - x \partial_y + v \partial_u - u \partial_v, \\ X_7 &= \mathbf{v} \partial_v + P \partial_p + s \partial_s, \end{aligned} \quad (2)$$

$$Z_w = \mathbf{w}(t, \mathbf{r}) \partial_v + p(t, \mathbf{r}) \partial_p + S(t, \mathbf{r}) \partial_s, \quad Z_\pi = \pi(t) \partial_p,$$

где $\mathbf{w}(t, \mathbf{r})$, $p(t, \mathbf{r})$, $S(t, \mathbf{r})$ — решение системы (1).

Набор операторов (2) включает операторы групп пространственно-временных сдвигов X_1 – X_4 , взаимно обусловленных сдвигов давления и солёности X_5 , вращения в горизонтальной плоскости X_6 и бесконечномерной подалгебры сдвигов давления Z_π . В набор генераторов симметрий (2) входят общие для всех линейных уравнений генераторы группы растяжений независимых переменных (генератор X_7) и бесконечномерная подгруппа (генератор Z_w), отражающие принцип суперпозиции решений.

Преобразование Фурье по времени переводит систему уравнений идеальной линейно стратифицированной жидкости $\left(s(z) = -\frac{z}{\Lambda} + s', \quad s' = \frac{1}{\Lambda} \int w dt \right)$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P - N^2 \int w dt \mathbf{e}_z, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

² Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)

*E-mail: baydulov@gmail.com

в уравнение внутренних волн

$$i\omega\mathbf{v} = -\nabla P - \frac{N^2}{i\omega}\mathbf{w}\mathbf{e}_z, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Допускаемая системой (3) группа симметрий существенно отличается от группы системы (1). Генераторы, её порождающие, имеют вид:

сдвиги

$$X_1 = \partial_z, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = \partial_y,$$

растяжения

$$X_4 = u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w + P\partial_P,$$

$$X_5 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + P\partial_P,$$

вращения в горизонтальной плоскости

$$X_6 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v,$$

гиперболические вращения

$$X_7 = \tilde{c}^2 z \partial_x + x \partial_z + \tilde{c}^2 w \partial_u + u \partial_w,$$

$$X_8 = \tilde{c}^2 z \partial_y + y \partial_z + \tilde{c}^2 w \partial_v + v \partial_w,$$

инверсии

$$X_9 = 2\tilde{c}^2 z(x\partial_x + y\partial_y) + (x^2 + y^2 + \tilde{c}^2 z^2)\partial_z + \tilde{c}^2[(2xw - 3zu)\partial_u + (2yw - 3zv)\partial_v] + (2(xu + yv) - 3\tilde{c}^2 zw + P)\partial_w - \tilde{c}^2 z P \partial_P, \quad (4)$$

$$X_{10} = (x^2 - y^2 + \tilde{c}^2 z^2)\partial_x + 2x(y\partial_y + z\partial_z) - (2(yv - \tilde{c}^2 zw) + 3xu + P)\partial_u + (2yu - 3xv)\partial_v + (2zu - 3xw)\partial_w - xP\partial_P,$$

$$X_{11} = 2y(x\partial_x + z\partial_z) + (-x^2 + y^2 + \tilde{c}^2 z^2)\partial_y + (2xv - 3yu)\partial_u - (2(xu - \tilde{c}^2 zw) + 3yv + P)\partial_v + (2zv - 3yw)\partial_w - yP\partial_P,$$

где

$$\tilde{c}^2 = N^2/\omega^2 - 1. \quad (5)$$

Кроме генераторов групп пространственных сдвигов, растяжений и вращения в горизонтальной плоскости в набор операторов (4) входят операторы гиперболических поворотов X_7, X_8 , а также инверсий ($x \rightarrow 1/x$) каждой из трёх независимых координат X_9, X_{10}, X_{11} . Уравнения Максвелла также допускают группу гиперболических поворотов в пространстве-времени, порождающие преобразования Лоренца. При этом роль временной переменной в уравнениях внутренних волн играет вертикальная координата, а скорости света — отношение частот плавучести и частоты волны \tilde{c} . Таким образом, преобразования, порождаемые операторами X_7, X_8 , для поля внутренних волн могут быть

соотнесены с преобразованиями Лоренца уравнений Максвелла [3].

МЕХАНИЧЕСКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВОРОТОВ

Учитывая группу симметрии системы (3), можно показать, что основные характеристики внутренних волн определяются свойствами псевдоевклидова пространства, в котором в роли интервала выступает инвариант трёхпараметрической группы преобразований с генераторами X_6, X_7, X_8 :

$$I^2 = \tilde{c}^2 z^2 - x^2 - y^2. \quad (6)$$

Симметрии системы отчётливо проявляются в структуре картины полей периодических внутренних волн, которые в средах с постоянной частотой плавучести существуют в форме волнового клина в двумерном случае или конуса в трёхмерном, распространяющимся под углом к горизонту $\vartheta = \arcsin(\omega/N)$. Типичное изображение поля внутренних волн (рис. 1), порождаемых колеблющимся с постоянной частотой горизонтальным цилиндром, приведено на фотографии, полученной методом шлирен-интерферометрии [4].

Угол раскрытия клина или конуса определяет область существования причинно связанных собы-

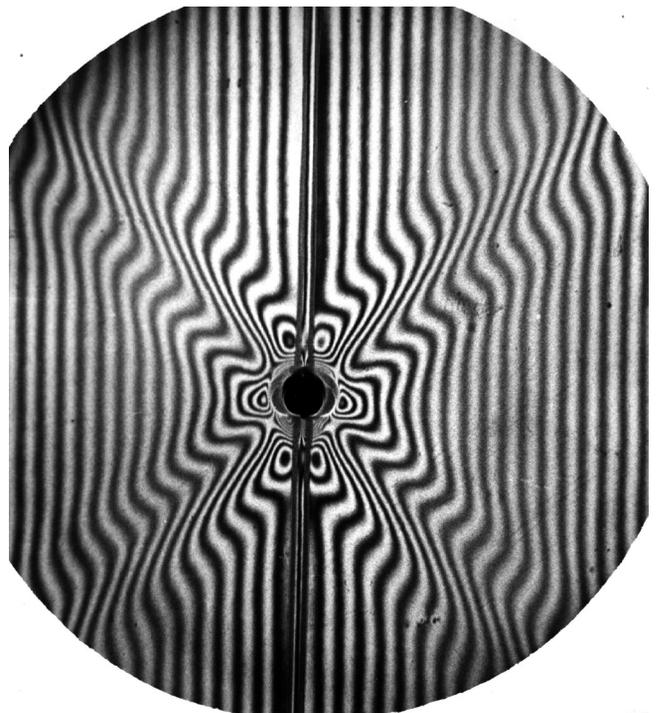


Рис. 1. Шлирен-интерферометрическое изображение поля внутренних волн, порождаемых вертикально осциллирующим цилиндром диаметром $d = 1$ см в жидкости с линейным профилем плотности.

тий. Изменение частоты внутренней волны, определяющей угловое положение волнового конуса, для электромагнитных волн оказывается в уравнениях Максвелла эквивалентным изменению скорости света и/или переходу в другую инерциальную систему отсчёта, движущуюся с новой собственной скоростью. По аналогии с электродинамикой для течений стратифицированной жидкости могут быть построены аналоги преобразований Лоренца и другие характеристики релятивистской механики.

Найдём вид преобразования, связывающего между собой системы уравнений монохроматических внутренних волн различной частоты. Для этого запишем две системы уравнений монохроматических внутренних волн с частотами ω_1 и ω_2 , исключив предварительно давление:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial c_1 w_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial u_1}{\partial c_1 z_1}, \\ \frac{\partial c_1 w_1}{\partial y_1} &= -\frac{\partial v_1}{\partial c_1 z_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} &= -\frac{\partial c_1 w_1}{\partial c_1 z_1}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial y_2} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial c_2 w_2}{\partial x_2} &= -\frac{\partial u_2}{\partial c_2 z_2}, \\ \frac{\partial c_2 w_2}{\partial y_2} &= -\frac{\partial v_2}{\partial c_2 z_2}, & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} &= -\frac{\partial c_2 w_2}{\partial c_2 z_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $c_j^2 = N^2/\omega_j^2 - 1, j = 1, 2$.

Системы (7) и (8) различаются значением параметра c_j . Найдём вид преобразований их связывающих. Замена переменных

$$c_1 w_1 = w, \quad c_2 w_2 = w', \quad c_1 z_1 = \tau, \quad c_2 z_2 = \tau' \quad (9)$$

переводит уравнения (7) и (8) в одну и ту же систему уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial \tau}, & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом c_1 и c_2 оказываются связанными друг с другом преобразованиями растяжения, которые в стандартной параметризации (нулевое значение параметра соответствует тождественному преобразованию) имеют вид $c_2 = c_1 \exp(a)$, a — параметр преобразования. Преобразованные системы (10) инвариантны относительно преобразований Лоренца, тогда соотношения (9) дают вид преобразований, переводящих системы (7) и (8) одна в другую:

$$x' = x \operatorname{ch} a + \tau \operatorname{sh} a, \quad \tau' = \tau \operatorname{ch} a + x \operatorname{sh} a, \quad (11)$$

$$u' = u \operatorname{ch} a + w \operatorname{sh} a, \quad w' = w \operatorname{ch} a + u \operatorname{sh} a, \quad (12)$$

которые, учитывая выбранную параметризацию, можно переписать через величины, входящие в системы (7) и (8):

$$x_2 = \frac{c_2^2 + c_1^2}{2c_1 c_2} x_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2c_1 c_2} c_1 z_1, \quad (13)$$

$$c_2 z_2 = \frac{c_2^2 + c_1^2}{2c_1 c_2} c_1 z_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2c_1 c_2} x_1,$$

$$u_2 = \frac{c_2^2 + c_1^2}{2c_1 c_2} u_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2c_1 c_2} c_1 w_1, \quad (14)$$

$$c_2 w_2 = \frac{c_2^2 + c_1^2}{2c_1 c_2} c_1 w_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2c_1 c_2} u_1,$$

где c_1 и c_2 зависят от частоты колебаний источника.

При этом величины, инвариантные относительно частоты колебания, имеют вид интервалов псевдо-евклидова пространства:

$$\begin{aligned} c_2^2 z_2^2 - x_2^2 &= c_1^2 z_1^2 - x_1^2 = \operatorname{inv}, \\ c_2^2 w_2^2 - u_2^2 &= c_1^2 w_1^2 - u_1^2 = \operatorname{inv}. \end{aligned} \quad (15)$$

Пользуясь инвариантностью системы (10) относительно преобразований Лоренца, а также учитывая соответствие между функциями течения и напряжённостями электромагнитного поля, можно найти закон преобразования всех гидродинамических функций.

Закон преобразования скоростей. По аналогии с теорией электромагнитных волн найдём закон преобразования фазовой скорости внутренних волн при изменении частоты колебаний источника, для чего построим соотношения соответствия, связывающие переменные электромагнитных и внутренних волн (двух- и трёхмерных). Поскольку уравнения внутренних волн записаны в образах Фурье, число независимых переменных оказывается пониженным, что при сопоставлении гидродинамических функций с полями напряжённостей электрического и магнитного полей приводит к наложению ограничений на величины, входящие в уравнения Максвелла, сопоставляемые с уравнениями внутренних волн.

Соответствие между двумерными уравнениями внутренних волн и уравнениями Максвелла в вакууме. Рассмотрим одномерное электромагнитное поле с векторами напряжённости вида

$$\mathbf{E} = E(x, t)\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{H} = H(x, t)\mathbf{e}_z. \quad (16)$$

Для электромагнитного поля (16) уравнения Максвелла сведутся к системе двух уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}. \quad (17)$$

Для построения соотношений, определяющих связи между переменными внутренних и электромагнитных волн, уравнения двумерных внутренних волн в Фурье пространстве могут быть приведены к виду

$$\frac{\partial \tilde{c}w}{\partial x} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial \tilde{c}w}{\partial z}. \quad (18)$$

Сравнивая между собой уравнения (17) и (18), получаем таблицу соответствия между зависимыми и независимыми переменными электромагнитных (ЭМВ) и внутренних (ВВ) волн.

Соответствие 1 между переменными систем (17) и (18):

ЭМВ	t	c	E	H
ВВ	z	\tilde{c}	$\tilde{c}w$	u

Выражая напряжённости электрического и магнитного полей через векторный и скалярный потенциалы

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (19)$$

и полагая в силу условия калибровки скалярный потенциал равным нулю, запишем потенциалы напряжённости электрического и магнитного полей в виде

$$\mathbf{A} = A(x, t)\mathbf{e}_y, \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad H = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (20)$$

Аналогичные выражения для компонент скорости внутренних волн можно также записать через векторный потенциал:

$$u = \frac{\partial A_\omega}{\partial x}, \quad \tilde{c}w = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial A_\omega}{\partial z}. \quad (21)$$

Использование потенциала позволяет записать тензор электромагнитного поля и его аналог для внутренних волн:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & -H & 0 \\ -E & H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{c}w & 0 \\ 0 & 0 & -u & 0 \\ -\tilde{c}w & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Знание тензоров (23) позволяет не только записать вид функции Лагранжа для задач теории внут-

ренних волн, но и составить инвариантные величины, остающиеся неизменными при переходе от одной частоты колебаний к другой.

Вид этих инвариантов легко найти, исходя из четырёхмерного представления поля с помощью антисимметричного 4-тензора F^{ik} . Очевидно, что из компонент этого тензора можно составить следующие инвариантные величины:

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv}, \quad e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv},$$

где e^{iklm} — абсолютно антисимметричный единичный тензор. Выражая компоненты F^{ik} через компоненты скорости, можно убедиться, что в трёхмерной форме эти инварианты имеют вид:

для электромагнитного поля

$$F_{ik}F^{ik} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 = \text{inv}, \quad \mathbf{E}\mathbf{H} = \text{inv}; \quad (24)$$

для поля внутренних волн

$$F_{ik}F^{ik} = 2(u^2 - \tilde{c}^2(\omega)w^2) = \text{inv}, \quad (25)$$

$$u^2 - \tilde{c}^2(\omega)w^2 = \text{inv}.$$

Псевдоскалярный инвариант (24) в теории внутренних волн всегда равен нулю, что имеет очевидный физический смысл: компоненты скорости внутренних волн при изменении частоты колебаний источника остаются ортогональными.

Двумерные уравнения Максвелла в вакууме. Для сопоставления уравнений трёхмерных внутренних волн с уравнениями Максвелла выберем электромагнитное поле в виде

$$\mathbf{H} = H\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y).$$

Тогда уравнения Максвелла в вакууме запишутся как

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (26)$$

Системе (26) соответствуют трёхмерные уравнения внутренних волн в образах Фурье по времени

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial \tilde{c}w}{\partial z}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}w}{\partial x} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tilde{c}w}{\partial y} = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Сравнивая между собой системы (26) и (27), запишем таблицу соответствия между зависимыми и независимыми переменными электромагнитных и внутренних волн.

Соответствие 2 между переменными систем (26) и (27):

ЭМВ	t	c	E_x	E_y	H
ВВ	z	\tilde{c}	$-v$	u	$\tilde{c}w$

Далее в полном соответствии со случаем одномерных уравнений Максвелла в вакууме найдём выражения для компонент скорости внутренних волн через векторный потенциал:

$$u = -\frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial A_{\omega,y}}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial A_{\omega,x}}{\partial z}, \quad \tilde{c}w = \frac{\partial A_{\omega,y}}{\partial x} - \frac{\partial A_{\omega,x}}{\partial y} \quad (28)$$

и аналог тензора электромагнитного поля для внутренних волн

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -v & u & 0 \\ v & 0 & -\tilde{c}w & 0 \\ -u & \tilde{c}w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & v & -u & 0 \\ -v & 0 & -\tilde{c}w & 0 \\ u & \tilde{c}w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для внутренних волн инвариантными относительно смены частоты колебания окажутся следующие величины:

$$F_{ik} F^{ik} = -2(u^2 + v^2 - \tilde{c}^2 w^2) = \text{inv}, \quad (30)$$

$$v^2 + u^2 - \tilde{c}^2 w^2 = \text{inv}.$$

Таким образом, сопоставление уравнений внутренних и электромагнитных волн позволило не только дать геометрическую интерпретацию картин течения, соответствующих различным частотам колебаний, но также найти закон преобразования функций течения и построить величины, остающиеся неизменными при таком переходе.

Аналоги зарядов и токов в теории внутренних волн. Для решения задач генерации внутренних волн и построения аналитических решений задач обтекания тел конечного размера в теории стратифицированной жидкости часто используют силовые и массовые источники, позволяющие на базе решения задач с точечными неоднородностями решать задачи с телами конечного размера. Аналогичные подходы ранее получили большее развитие в электромагнетизме.

Линеаризованные уравнения внутренних волн в образах Фурье по времени с массовыми силами и источниками имеют вид

$$\text{div } \mathbf{v} = m, \quad i\omega \mathbf{v} = -\nabla P - \frac{N^2}{i\omega} w \mathbf{e}_z + \mathbf{f}, \quad (31)$$

где $\mathbf{v} = (u, v, w)$, m и \mathbf{f} — плотность массовых и силовых источников соответственно.

Исключая из системы (31) давление, приходим к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = m, \quad i\omega \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x},$$

$$i\omega \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{1}{c_\omega^2} \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial f_z}{\partial x} \right), \quad (32)$$

$$i\omega \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{1}{\tilde{c}^2} \left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{1}{\tilde{c}} \frac{\partial f_z}{\partial y} \right).$$

Для построения соотношений, связывающих силовые и массовые источники, входящие в уравнения внутренних волн с плотностями зарядов и токов, запишем уравнения Максвелла в общем виде:

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (33)$$

Как и ранее, рассмотрим электромагнитное поле двух видов:

$$1) \quad \mathbf{E} = (E_x(x, y, t), E_y(x, y, t)), \quad (34)$$

$$\mathbf{H} = H(x, y, t) \mathbf{e}_z;$$

$$2) \quad \mathbf{H} = (H_x(x, y, t), H_y(x, y, t)), \quad (35)$$

$$\mathbf{E} = E(x, y, t) \mathbf{e}_z.$$

Выбор геометрии электромагнитного поля двух видов позволит построить аналогию с уравнениями течений стратифицированной жидкости в присутствии источников.

Соответствие 3 между источниками внутренних волн и электрическими токами и зарядами, порождающими электромагнитное поле вида (34):

ЭМВ	t	c	H	E_x	E_y
ВВ	z	\tilde{c}	$\tilde{c}w$	$-v$	u
ЭМВ	j_x	j_y	j_z	ρ	
ВВ	$\frac{1}{4\pi i\omega} \times$	$-\frac{1}{4\pi i\omega} \times$	0	$\frac{1}{4\pi i\omega} \times$	
	$\times \left(\frac{\partial f_y}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial y} \right)$	$\times \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right)$		$\times \left(\frac{\partial f_x}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial x} \right)$	

Расписывая уравнения Максвелла в покомпонентном виде с учётом выбранной геометрии и сопоставляя с системой (32), напомним таблицу соответствия между зависимыми и независимыми переменными внутренних и электромагнитных волн.

Соответствие 4 между источниками внутренних волн и электрическими токами и зарядами, порождающими электромагнитное поле вида (35):

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{ЭМВ} & t & c & E & H_x & H_y & J_x & J_y & J_z & \rho \\ \text{ВВ} & z & \tilde{c} & \tilde{c}w & v & -u & 0 & 0 & -\frac{\tilde{c}}{4\pi}m & 0 \end{array}$$

Как видно из соответствия 4, для поля вида (35) при построении соответствия между источниками возникает дополнительное условие для массовых сил в уравнениях внутренних волн, а именно $\text{rot} \mathbf{f} = 0$, которое вытекает из известной асимметрии уравнений Максвелла, связанной с отсутствием магнитных зарядов.

В заключение следует отметить, что приведённые примеры не исчерпывают возможности, предоставляемые методами теории непрерывных групп для анализа свойств внутренних волн, а служат основой для дальнейшего взаимного переноса разработанных

методов решения задач в гидродинамике и электромагнетизме.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке ОЭММПУ РАН IV-4-12.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 400 с.
2. *Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.* Инвариантные свойства уравнений движения стратифицированных жидкостей // ДАН. 2002. Т. 387. № 6. С. 760–763.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 7. С. 744–754.

AN ANALOGY BETWEEN ELECTROMAGNETIC AND INTERNAL WAVES

V. G. Baydulov, P. A. Lesovskiy

¹ *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

² *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev August 17, 2018

Received August 23, 2018

For the symmetry group of internal-wave equations, the mechanical content of invariants and symmetry transformations is determined. The performed comparison makes it possible to construct expressions for analogs of momentum, angular momentum, energy, Lorentz transformations, and other characteristics of special relativity and electro-dynamics. The expressions for the Lagrange function are defined, and the conservation laws are derived. An analogy is drawn both in the case of the absence of sources and currents in the Maxwell equations and in their presence.

Keywords: internal waves, invariants, Lee groups, Lorentz transformation.