

УДК 539.3:534.1

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА КЛИНЕ ПРИ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ МЕТОДОМ СМИРНОВА—СОБОЛЕВА

М. Ш. Исраилов

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 20.11.2018 г.

Поступило 29.10.2018 г.

До сих пор метод Смирнова—Соболева применялся только к проблемам дифракции с краевыми условиями Дирихле и Неймана. В настоящей работе показано, что он приводит также к точному решению смешанной задачи дифракции на клине, весьма важной, например, для оценки возможности защиты от взрывных волн клиновидными барьерами с разными отражающими свойствами сторон.

Ключевые слова: дифракция, клин, смешанные краевые условия, метод Смирнова—Соболева.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854434-437>

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ НА КЛИНЕ. КЛАССЫ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ, РАЗРЕШИМЫХ ПО МЕТОДУ СМИРНОВА—СОБОЛЕВА

Рассматривается задача о дифракции нестационарной плоской волны

$$p_0 = H(at/r + \cos(\theta - \theta_0)) \quad (1)$$

в двумерной угловой области $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi - \alpha$, на границе которой заданы смешанные краевые условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= 0 \text{ при } \theta = 0, r > 0, \\ p &= 0 \text{ при } \theta = 2\pi - \alpha, r > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p — давление в идеальной жидкости или газе, рассматриваемое как функция времени t и полярных координат (r, θ) с полюсом в вершине угла (клина), а $H(\xi)$ — ступенчатая функция Хевисайда. В линейном приближении [1] давление p удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (3)$$

в котором a — скорость распространения звука в среде.

В зависимости от значений углов θ_0 и α состояние среды при $t < 0$ определяется либо только падающей волной (1), либо суммой падающей волны и одной

или нескольких отражённых от граней клина волн. Задача дифракции состоит в нахождении функции p в моменты времени $t > 0$.

Единственность решения описанной задачи обеспечивается “условиями на ребре” [1], налагаемыми на поведение решения в окрестности угловой точки. Они выполнены, если функция p ограничена в названной окрестности.

Через решение сформулированной автомодельной задачи выписываются решения следующих нестационарных задач дифракции в угловых областях при смешанных краевых условиях.

1. Задачи дифракции плоских волн произвольного профиля. Решения их выражаются интегралом Дюамеля по времени через решения задач со ступенчатыми падающими волнами. Доказательство этого дано С.Л. Соболевым [2, 3] и не зависит от типа краевых условий.

2. Пространственные задачи дифракции плоских волн на двугранном угле. Они сводятся к двумерным переходам к подвижной системе координат [3, 4].

3. Нестационарные задачи дифракции на клине волн от двумерного и трёхмерного точечных источников. А.Ф. Филипповым [5] установлены простые аналитические соотношения, связывающие решения задач дифракции цилиндрических и сферических волн от источников с решениями для плоских падающих волн при краевых условиях Дирихле и Неймана. Эти же связи имеют место и в случае смешанных краевых условий.

Комплексный научно-исследовательский институт
им. Х.И. Ибрагимова Российской Академии наук,
Грозный
E-mail: israiler@hotmail.com

4. Задачи дифракции упругих волн на клине при разделяющихся в потенциалах перемещений смешанных краевых условиях (когда на одной грани клина заданы касательные напряжения и нормальные смещения, а на другой — касательные перемещения и нормальные напряжения). Решения таких задач, как и при краевых условиях одного типа [6–8], могут быть найдены путём гашения сингулярностей “акустической” части решения.

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В автомодельных переменных ($s \equiv r/(at)$, θ) размерность задачи понижается на единицу, и волновое уравнение (3) в пространстве меньшей размерности сводится к уравнению, имеющему гиперболический тип во внешности единичного круга $s \leq 1$ и эллиптический тип внутри этого круга [2, 3]. В гиперболической области $s > 1$ названное уравнение имеет характеристики $\xi_{1,2} \equiv \theta \mp \arccos(1/s) = \text{const}$, являющиеся полукасательными к окружности $s = 1$, и оно сводится к уравнению колебаний струны в характеристических переменных (ξ_1 , ξ_2). Следовательно, не представляет труда нахождение отражённых от граней клина волн, а значит, и нахождение полного решения задачи в области $s > 1$.

Будем в дальнейшем считать, что $\alpha < \pi$. Тогда при угле падения $\theta_0 \in J_1 \equiv (0, \pi - \alpha)$ существует только отражённая от (верхней) грани клина $\theta = 0$ волна, при $\theta_0 \in J_3 \equiv (\pi, 2\pi - \alpha)$ образуется только волна, отражённая от (нижней) грани клина $\theta = 2\pi - \alpha$, а при $\theta_0 \in J_2 \equiv (\pi - \alpha, \pi)$ существуют обе эти волны. Причём, согласно краевым условиям (2), в волнах, отражённых от верхней грани клина, давление $p = +1$, а от нижней — $p = -1$.

Когда $\alpha > \pi$ и среда образует входящий угол, за падающей волной может образоваться одна, две или даже несколько (но конечное число) многократно отражённых от границ угловой области волн, число которых определяется углами $2\pi - \alpha$ и θ_0 . Полный разбор возникающих здесь случаев дан в работе [4] для краевых условий Неймана и Дирихле. Этот анализ легко распространяется и на рассматриваемую смешанную задачу.

В эллиптической области $s < 1$ уравнение (3) сводится к уравнению Лапласа с помощью преобразования Чаплыгина $\eta = 1/s - \sqrt{1/s^2 - 1}$, сохраняющим геометрию области определения решения (сектора D ($0 < s \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi - \alpha$)). На радиусах сектора D должны удовлетворяться краевые условия (2),

а на дуге окружности $s = 1$ давление p задаётся по непрерывности равным предельному значению p_C на ней указанного выше решения задачи для гиперболической области $s > 1$ (недопустимость разрыва при переходе через дифракционный конус $r = at$ обоснована в работах [2, 4]). Следовательно, для рассматриваемого случая $\theta_0 \in J_1 \equiv (0, \pi - \alpha)$ имеем $p_C = H(-\theta + \pi - \theta_0) + H(-\theta + \pi + \theta_0)$.

Введём теперь, следуя методу функционально-инвариантных решений, комплексную переменную $z = \eta e^{i\theta}$ и будем разыскивать функцию p в секторе D в виде действительной части аналитической функции $p = \text{Re}\{F(z)\}$. Отобразим сектор D в правую четверть OAB единичного круга (рис. 1) при помощи преобразования $w = z^{1/2} = (\eta e^{i\theta})^{1/2} \equiv \text{Re} e^{i\omega}$, где

$$R = \eta^{1/2} = \left(\frac{at}{r} - \sqrt{\frac{a^2 t^2}{r^2} - 1} \right)^{1/2}, \quad \omega = \frac{l\theta}{2}, \quad l = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}.$$

В рассматриваемом случае $\alpha < \pi$ число l изменяется в пределах $1/2 \leq l < 1$.

Пользуясь тем, что $p = 0$ на радиусе OB , распространим аналитическую в OAB функцию $\Phi(w)$ на полукруг $OABCO$, продолжая её действительную часть p нечётным образом через OB в левую четверть круга OBC . Тогда функция p принимает на полуокружности ABC значения $+2, +1, 0, -1$ и -2 соответственно на дугах $AA_0, A_0A_1, A_1BA'_1, A'_1A'_0$ и A'_0C ; точки A_0, A_1, A'_1 и A'_0 определены последовательно углами $\omega_0 = l(\pi - \theta_0)/2$, $\omega_1 = l(\pi + \omega_0)/2$, $\omega'_1 = \pi - \omega_1$ и $\omega'_0 = \pi - \omega_0$. Кроме того, $\frac{\partial p}{\partial \omega} = 0$ на радиусе OC , так как это условие выполнено на OA в силу краевых условий (2). Направление ω является касательным к окружности, поэтому производная $\frac{\partial p}{\partial \omega}$ на ABC может быть вычислена по известной на ней p , а именно она равна со знаком “минус” сумме четырёх дельта-функций. Таким образом, задача свелась в плоскости w к нахождению в полукруге аналитической функции по заданной

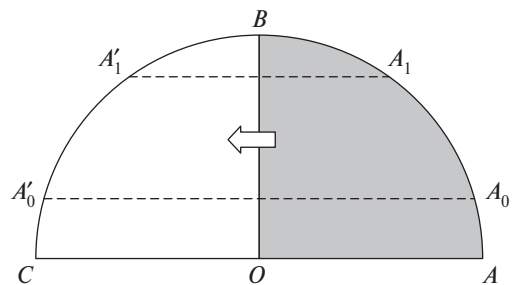


Рис. 1. Аналитическое продолжение и область решения в w -плоскости.

на границе производной $\frac{\partial p}{\partial \omega}$ её действительной части.

Полукруг $OABCO$ отображается в (нижнюю) полуплоскость при помощи конформного преобразования, задаваемого функцией Жуковского ([9, гл. II]):

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right). \quad (4)$$

Действительно, $\text{Im } \zeta = (R - 1/R) \sin \omega \leq 0$, когда $|w| \equiv R < 1$ и $0 \leq \omega \leq \pi$. При этом диаметр COA переходит во внешность отрезка $(-1, +1)$ действительной оси, а полуокружность ABC — в отрезок $(-1, +1)$ этой оси. Следовательно, в плоскости ζ задача сводится к нахождению аналитической в полуплоскости $\text{Im } \zeta < 0$ функции $-i\Phi'(\zeta)\sqrt{\zeta^2 - 1}$ по её действительной части $\frac{\partial p}{\partial \omega}$, заданной на границе $\text{Im } \zeta = 0$ (в виде суммы четырёх дельта-функций).

Ядро Шварца для полуплоскости известно, и поэтому решение такой задачи легко находится, а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \omega} &= \text{Re} \left\{ -i\Phi'(\zeta)\sqrt{\zeta^2 - 1} \right\} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\sin \omega_0}{\zeta + (-1)^k \cos \omega_0} + \frac{\sin \omega_1}{\zeta + (-1)^k \cos \omega_1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что решение (5) определено с точностью до действительной части от полинома по ζ с мнимыми коэффициентами. Из условия на ребре (ограниченности p) следует, что этот полином тождественно равен нулю.

После ряда преобразований с использованием равенства (4) для ζ правая часть (5) переразлагается в алгебраическую сумму четырёх слагаемых

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^1 \text{Re} \left\{ -\frac{1}{\text{sh}[\chi - i(\omega - \omega_k)]} + \frac{1}{\text{sh}[\chi - i(\omega + \omega_k)]} \right\}, \\ \chi \equiv \ln \frac{1}{R} = \frac{l}{2} \text{arch} \left(\frac{at}{r} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

допускающих точное вычисление квадратур. В результате решение задачи в дифракционном круге даётся выражением

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin \Omega_1}{\text{sh } \chi} + \frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin \Omega_2}{\text{sh } \chi} - \\ &- \frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin \Omega_3}{\text{sh } \chi} + \frac{1}{\pi} \text{arctg} \frac{\sin \Omega_4}{\text{sh } \chi}, \end{aligned} \quad (7)$$

в котором обозначено $\Omega_1 = \omega - \omega_0$, $\Omega_2 = \omega + \omega_0$, $\Omega_3 = \omega - \omega_1$ и $\Omega_4 = \omega + \omega_1$. Значения арктангенсов берутся, как обычно, из интервала $(-\pi/2, +\pi/2)$.

При вычислении квадратур от слагаемых в (6) возникают константы интегрирования, сумма которых полагается равной нулю вследствие непрерывности решения на дифракционном конусе $r = at$. Так же решается задача и в двух других случаях, когда угол падения $\theta_0 \in J_2$ и $\theta_0 \in J_3$.

Путём несложных вычислений можно убедиться непосредственно, что каждый член в (7) удовлетворяет уравнению Лапласа и что сумма их совпадает на дифракционном конусе с решением в гиперболической области. Таким образом, построено обобщённое решение исходной задачи, принадлежащее (по определению В.И. Смирнова и С.Л. Соболева) классу решений с “правильными” разрывами на фронтах волн, удовлетворяющими кинематическим и динамическим условиям совместности.

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В УГЛОВОЙ ТОЧКЕ

Ввиду существенных различий в условиях существования и порядках особенностей решений задач дифракции со смешанными и однотипными крайними условиями вкратце остановимся на этом вопросе. Поскольку

$$\begin{aligned} 2 \text{sh } \chi &= [s^{-1} + \sqrt{s^{-2} - 1}]^{1/2} - \\ &- [s^{-1} + \sqrt{s^{-2} - 1}]^{-1/2} \rightarrow +\infty \quad \text{при } r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

аргументы арктангенсов в формуле (7) малы. Тогда, разлагая арктангенсы в ряды Тейлора и используя представление

$$(\text{sh } \chi)^{-1} \approx 2[(s/2)^{1/2} + (s/2)^{3/2}] + O(s^{5/2}),$$

получаем асимптотику решения (7) вблизи вершины клина в виде

$$\begin{aligned} p &\approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^4 (-1)^k \times \\ &\times \left[2 \sin \Omega_k \left(\frac{r}{2at} \right)^{1/2} + \frac{2}{3} \sin 3\Omega_k \left(\frac{r}{2at} \right)^{3/2} \right] + O(r^{5/2}). \end{aligned} \quad (8)$$

В разложении (8) удержаны только члены, которые могут дать в угловой точке особенности в производных p с учётом того, что всегда $l \geq 1/2$. Это значит, что могут иметь особенности (быть бесконечными) скорости и ускорения точек среды.

Представленные выше результаты относятся к случаю $\alpha < \pi$ ($l < 1$). Однако аналогичные (7) решения могут быть получены и при $\alpha > \pi$ ($l > 1$). Поэтому при анализе особенностей (8) будем учитывать и значения l , большие единицы. Тогда этот анализ приводит к следующим выводам:

производные p по пространственным переменным, т.е. ускорения частиц среды, а тогда и их скорости, имеют в вершине клина сингулярность уже при углах $2\pi - \alpha > \pi/2$, в отличие от решений задач дифракции с однотипными краевыми условиями, когда особенность имеется только для углов $2\pi - \alpha > \pi$.

асимптотики компонент $\text{grad } p$ при $2\pi - \alpha > 3\pi/2$ (в вершине острого клина) содержат по два сингулярных члена степенного типа, порядки которых принадлежат интервалам $[-3/4, -2/3]$ и $[-1/4, 0]$, тогда как при однотипных краевых условиях имеются только одночленные особенности с порядками из интервала $[-1/2, -1/3]$.

Источник финансирования. Работа поддержана РФФИ (проект № 17–08–00066).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedlander F.* Sound Pulses. Cambridge: Cambridge Press, 1958. 202 p.
2. *Соболев С.Л.* // Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР. 1934. № 41. С. 1–20.
3. *Соболев С.Л.* // Гл. XII книги: *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 2. 998 с.
4. *Keller J.B., Blank A.* // *Communs Pure and Appl. Math.* 1951. V. 4. № 1. P. 75–94.
5. *Филиппов А.Ф.* // ПММ. 1964. Т. 28. № 2. С. 305–318.
6. *Костров Б.В.* // ПММ. 1966. Т. 30. № 1. С. 198–203.
7. *Капустянский С.М.* // ПММ. 1976. Т. 40. № 1. С. 190–192.
8. *Исраилов М.Ш.* // ДАН. 1979. Т. 247. № 4. С. 815–818.
9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. III. Ч. 2. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1958. 674 с.

EXACT SOLUTION OF PROBLEMS OF DIFFRACTION OF UNSTEADY WAVES ON A WEDGE UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS BY THE SMIRNOV—SOBOLEV METHOD

M. Sh. Israilov

*Kh. Ibragimov Complex Institute of the Russian Academy of Sciences,
Grozny, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov November 20, 2018

Received October 29, 2018

Until now, the Smirnov—Sobolev method has been applied only to diffraction problems with the Dirichlet and Neumann boundary conditions. In this study, it is shown that the method also leads to an exact solution of the mixed problem of diffraction on a wedge, which is very important, for example, for estimating the possibility of protection from blast waves by wedge-shaped barriers with different reflecting properties of the sides.

Keywords: diffraction, wedge, mixed boundary conditions, the Smirnov—Sobolev method.