

УДК 550.31:551.335.6:523.483

СТРУКТУРА РЕЛЬЕФА И ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ПЛАНЕТ:  
ПРАВИЛО КАУЛЫ — СЛЕДСТВИЕ ЗАКОНОВ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.Н. КОЛМОГОРОВА И ЕГО ШКОЛЫ

Е. Б. Гледзер, академик РАН Г. С. Голицын\*

Поступило 27.11.2018 г.

Более 50 лет известно эмпирическое правило Каулы: коэффициенты разложения по сферическим гармоникам флуктуаций гравитационного поля планет и рельефа их поверхностей убывают как квадрат номера гармоники. Это было найдено также для Венеры, Луны, Марса, астероида Веста и совсем мелких небесных тел. Обратно квадратичные линейные спектры найдены и для различных типов участков земной поверхности в масштабах до сотни километров. Отсюда следует, что спектры углов наклонов рельефа постоянны, т.е. являются “белым шумом”. Тогда они  $\delta$ -коррелированы по горизонтали. Именно в этих предположениях выведены законы случайных блужданий А.Н. Колмогорова 1934 г. Используя их, выводится уравнение диффузии вероятности рельефа по горизонтали с линейным коэффициентом диффузии  $D$ . По эмпирическим данным для Земли величина  $D = 1,3 \pm 0,3$  м, а для Венеры почти на порядок меньше. Уклоны сопротивляются ветру, вдоль них сыплется порода, течёт вода. Данное рассмотрение превращает правило Каулы в закон случайных блужданий (по рельефу) Колмогорова 1934 г.

*Ключевые слова:* спектр рельефа, углы наклонов, белый шум, случайные блуждания.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524854493-496>

С началом спутниковой эры стали измеряться флуктуации гравитационного поля планет, потом и астероидов, а также их рельефа. Более 50 лет известно эмпирическое правило Каулы [1]: коэффициенты разложения полей по сферическим гармоникам убывают как квадрат номера гармоники при соединённого полинома Лежандра  $P_j^m$  начиная с  $j \geq 5$ . Это было обнаружено сначала для Земли, потом для Луны, Венеры [2], Марса [3], в последнее время для астероидов [4] и совсем малых тел  $\sim 1$  км [5]. Однако теоретические основания существования такого правила в интервале  $1-10^4$  км оставались непонятными (см., например, [5]). В настоящей работе показано, что это следствие законов теории вероятностей А.Н. Колмогорова [6] и их развития учениками его школы [7].

Когда альтиметры начали измерять структуру планетных поверхностей, выяснилось, что пространственный спектр рельефа  $S(k) \sim k^{-2}$  обратно пропорционален квадрату волнового числа  $k = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны на местности. Было замечено [8], что спектр производной поверхности постоянен по горизонтали  $\frac{\partial z(\theta, \varphi)}{\partial y} = \zeta(y)$ . Это значит, что углы склона рельефа  $\delta$ -коррелированы по ко-

ординате (угловые скобки — операция осреднения):

$$\langle \zeta(y_1) \zeta(y_2) \rangle = \zeta^2 \delta(y_1 - y_2), \quad (1)$$

что соответствует марковости ( $\delta$ -коррелированности) ускорений, т.е. сил, поскольку вдоль склонов действует сила тяжести (сыплется порода, течёт вода и т.п.). В терминах А.Н. Колмогорова [6] это марковость, независимость воздействий в соседние моменты времени (или на соседних участках местности).

Структура рельефа, измеренная пролётными аппаратами, отображается временными записями  $h(t)$ . Время связано с координатой как  $y = ut$ , где  $u$  — скорость полёта. В книге [2] приведены образцы таких записей, представляющие типичные случайные процессы. Такие процессы описываются уравнением Фоккера—Планка для плотности распределения вероятности  $p(t, z)$ , где  $z$  — исследуемая величина. Зная скорость регистрации, перепишем уравнение Фоккера—Планка в виде

$$\frac{\partial p}{\partial y} = D \frac{\partial^2 p}{\partial h^2}, \quad D = r_y \frac{\zeta^2}{2}, \quad (2)$$

где  $r_y$  — масштаб корреляции по горизонтали случайных наклонов рельефа, предполагаемых много меньше его крупномасштабных вариаций,  $D$  — коэффициент диффузии с размерностью длины,  $\zeta^2$  — средний квадрат углов наклона рельефа. Угол на-

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова  
Российской Академии наук, Москва

\*E-mail: [gsg@ifaran.ru](mailto:gsg@ifaran.ru)

клона определяется как  $\frac{dh}{dy} = \zeta(y)$ , где для случайных углов предполагается  $\delta$ -коррелированность. Интегрирование по частям (2) при  $p(h \rightarrow \infty, y) = 0$  даёт

$$\frac{d\langle h^2(y) \rangle}{dy} = D\zeta^2, \quad \langle h^2(y) \rangle = \int_0^\infty h^2 p(h, y) dh = Dy. \quad (3)$$

Последнее равенство можно рассматривать как структурную функцию (случайного размера по горизонтали) с нулевыми начальными условиями. Если она пропорциональна координате, то её спектр будет равен  $\pi D_y k^2$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  — волновое число [7]. В книге [2] приведены данные для спектров горных, холмистых и равнинных областей штата Орегон по 20 пролётам в различных направлениях в каждой из областей. В интервале размеров от 1 до 60 км значения показателей спектра в [8] оценены как  $2,0 \pm 0,04$ . Если спектр рельефа пропорционален  $k^{-2}$ , то спектр углов склона, т.е. горизонтальных производных рельефа, постоянен по  $k$ , т.е. это “белый шум”.

Спектры крупномасштабных неоднородностей рельефа планет и других небесных тел надо получать путём разложения случайных сигналов по сферическим гармоникам, т.е. по присоединённым полиномам Лежандра  $P_j^m$ . Рассмотрим рельеф на сфере  $z(\varphi, \theta)$ , где  $\varphi$  — долгота,  $\theta$  — дополнение до широты,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $r$  — радиус сферы. Тогда угол по меридиану

$$\frac{\partial z(\varphi, \theta)}{r \partial \theta} = \zeta_\theta(\varphi, \theta). \quad (4)$$

Введём  $x = \cos \theta$  и представим рельеф через нормированные присоединённые полиномы Лежандра  $P_j^{|m|}(x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{z(\varphi, \theta)}{r} &= - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j a_m^j \exp(im\varphi) \Phi_j^{|m|}(x), \\ \Phi_j^{|m|}(x) &= N_j^{|m|} P_j^{|m|}(x), \\ \int_{-1}^1 \Phi_j^{|m|}(x) \Phi_i^{|m|}(x) dx &= \delta_{ji}, \\ N_j^{|m|} &= \left( \frac{2j+1}{2} \frac{(j-|m|)!}{(j+|m|)!} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда согласно (4) наклон рельефа

$$\zeta_\theta(\varphi, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j a_m^j \exp(im\varphi) \sin \theta \frac{d\Phi_j^{|m|}(x)}{dx}. \quad (6)$$

Рассмотрим среднюю нормированную энергию углов наклона  $\zeta_\theta$ :

$$\begin{aligned} E_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \langle \zeta_\theta^2 \rangle d\varphi dx = \\ &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \langle |a_m^j|^2 \rangle \int_{-1}^1 (1-x^2) \left( \frac{d\Phi_j^{|m|}(x)}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned} \quad (7)$$

Среднее значение спектральных компонент  $\langle |a_m^j|^2 \rangle$  зададим не зависящим от  $m$ , что подтверждается наблюдениями и на практике [2] строится в зависимости только от индекса  $j$ , и равным

$$\langle |a_m^j|^2 \rangle = \frac{\alpha^2}{j(j+1)(j+1/2)}, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — средний угол наклона.

С учётом (7) и (8) после вычисления интеграла по  $x$  и суммы по  $m$  в (7) для энергии углов наклона  $E_\theta$  имеем

$$E_\theta = 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} S_j, \quad S_j = \alpha^2, \quad (9)$$

т.е. постоянный спектр белого шума и на сфере, что соответствует  $\delta$ -коррелированности по  $\theta$ . Тогда для энергии рельефа из (7)–(9) получаем

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \langle z^2 \rangle d\varphi dx = \\ &= 2\pi r^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \langle |a_m^j|^2 \rangle \int_{-1}^1 (\Phi_j^{|m|}(x))^2 dx = \\ &= 2\pi r^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \langle |a_m^j|^2 \rangle, \end{aligned}$$

так что среднее спектральных компонент (8), соответствующее белому шуму углов наклона, даёт при  $j \gg 1$  спектр рельефа  $\sim j^{-2}$  в соответствии с эмпирическими данными [2]:

$$\begin{aligned} E &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{r^2 a^2}{j(j+1)(j+1/2)} = \\ &= 2\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^2 a^2 (2j+1)}{j(j+1)(j+1/2)} = 4\pi \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^2 a^2}{j(j+1)} = \\ &= 4\pi r^2 \alpha^2 = 4\pi r D, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $D = r\alpha^2$  — коэффициент диффузии в координатном пространстве. При этом учтено, что  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1$ . Из (10) следует, что амплитуда гармоники

$$S_j = \frac{4\pi r D}{j(j+1)}. \quad (11)$$

Асимптотика полинома  $P_j^m(\cos\theta)$  при  $j \rightarrow \infty$  и переход к длине волны вдоль меридиана  $y = r\theta$  позволяет получить спектр рельефа  $k^{-2}$ . Наш спектр (16) отличается от эмпирического спектра Каулы на множитель  $(1 + 1/j)^{-1}$ , что значимо при небольших индексах  $j$ . Но уже при  $j = 5$  различие лишь в 20%. Это показывает, что гипотеза о белом шуме спектра углов наклона на самых крупных масштабах не действует, и соответствующая структура должна быть своя на каждой планете в соответствии со своей тектоникой, что и подтверждает рис. 7.20 из [20], где сравниваются спектры рельефов Земли и Венеры, различающиеся амплитудами и положением первых 4–5 сферических гармоник. Для  $j > 5$  амплитуды гармоник хорошо следуют обратной квадратичной зависимости для Земли с  $j \leq 180$  и Венеры с  $j \leq 50$ . На упомянутом рисунке из [2] приведены эмпирические значения амплитуд гармоник  $S_j = 4\pi r^2/j^{-2}$ . Для определения коэффициента диффузии в формуле (11) они сравнивали их с эмпирическими гармониками в [2]. Сравнение было сделано для гармоник с номерами 5, 10, 20, 30, 40, 60 и 90 для Земли, а для Венеры это 5, 10, 15, 20, 30, 40 и 50. В отсутствие первичных данных величины гармоник определялись на глаз с точностью примерно 10% внутри их порядка величин, заданных в логарифмических координатах. Для Земли это дало  $D = 1,3 \pm 0,3$  м, для Венеры  $D = 0,19 \pm 0,03$  м. Точность в определении нашего “коэффициента” горизонтальной диффузии порядка 20%, но бесспорно то, что эти величины различаются в несколько раз, хотя надо иметь в виду, что данные для Венеры относятся лишь к экваториальным довольно гладким возвышенностям планеты.

В работе [3] даны спектры рельефа для Марса, Луны и Земли (с учётом и без учёта океанского дна), в первом случае число сферических гармоник 23 100, в остальных случаях  $j \leq 46 200$ . Те же спектры представлены и в линейных длинах волн по поверхности объектов, для Земли минимальная длина волны  $\lambda = 460$  м, для Луны 120 м. На рис. 5 из [3] мы провели дополнительные линии  $k^{-2}$ , которые хорошо следуют эмпирическим спектрам для Земли и Марса. Для Луны спектр рельефа почти уплощается в интервале длин волн 200–80 км. Это явные следы бомбардировки её поверхности астероидами с размерами до 10 км, поскольку размер кратеров в 10–20 раз больше ударного тела [9]. Спектр для Луны начиная с  $\lambda$  в несколько км увеличивает крутизну до  $k^{-4}$ . Для остальных объектов также намечается некоторое увеличение крутизны спектров. Этот факт можно понять, отказавшись от гипотезы марковости,

т.е.  $\delta$ -коррелированности углов наклона в этих масштабах. Например, если ввести вместо постоянного угла  $\alpha^2$  корреляционную функцию углов, например падающую до некоторого масштаба  $\Delta$ , то можно получить асимптотику  $k^{-4}\Delta^2$ .

Таким образом, использование уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова, преобразованного в уравнение (1) для описания статистической структуры рельефа, даёт возможность превратить правило Каулы (“правило большого пальца” [5]) в точное следствие вероятностных законов, описываемых (1). При этом спектр углов склона рельефа оказывается постоянным, т.е. “белым шумом” вдоль горизонтальной длины волны  $\lambda$ . Если первоначальный рельеф имеет тектоническое происхождение вплоть до гармоник  $j \leq 5$ , то его дальнейшая эволюция происходит из-за силы тяжести, действующей по углам: течёт вода, сыплется порода, разрушаемая разнообразными факторами. Так происходит в течение миллионов лет горизонтальная диффузия рельефа, ведущая к спектру  $k^{-2}$ . Коэффициент диффузии  $D$  является аналогом константы Каулы для рельефа.

Аналогичная методика объясняет и структуру флуктуаций гравитационных полей небесных тел, первоначальное правило Каулы. Однако её физическая интерпретация ожидает более конкретных работ, например, гармонического анализа полей плотности во внутреннем её распределении хотя бы для нашей планеты. Анализ природных процессов и явлений с помощью уравнения для плотности их вероятности с течением времени был начат А. Эйнштейном и М. Смолуховским, развивался Ф. Фоккером и М. Планком, и в наиболее общем и рабочем виде был представлен А.Н. Колмогоровым в 1934 г. Его использование в самое последнее время для морского ветрового волнения и др. было дано в [10].

**Благодарности.** В заключение благодарим О.Г. Чхетиани за постоянную помощь в работе и обсуждении её результатов.

**Источник финансирования.** Работа была частично поддержана подпрограммой Президиума РАН 1.2 “Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и их приложение”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kaula W.M.* Theory of Satellite Geodesy. Bleinsdell: Waltham, 1966.
2. *Turcotte D.L.* Chaos and Fractals in Geology and Geophysics. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 398 p.
3. *Rexer M., Hirt C.* // Surv. Geophys. 2015. V. 36. P. 803.
4. *Konopliv A.S., et al.* // Icarus. 2014. V. 240. P. 103–117.

5. McMahon J. W., et al. // Proc. 47th Lunar and Planetary Sci. Conference. 2016.
6. Kolmogorov A.N. // Ann. Math. 1934. V. 35. P. 116–117.
7. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Физматлит, 1967. Т. 2.
8. Голицын Г.С. // Физика Земли. 2003. № 7. С. 3–8.
9. Werner S.C., Harris A.W., Neukum G., Ivanov B.A. // Icarus. 2002. V. 156. P. 287–290.
10. Голицын Г.С. // Метеорология и гидрология. 2018. № 3. С. 5–15.

## STRUCTURE OF THE TERRAIN AND GRAVITATIONAL FIELD OF THE PLANETS: KAULA'S RULE AS A CONSEQUENCE OF THE PROBABILITY LAWS BY A.N. KOLMOGOROV AND HIS SCHOOL

**E. B. Gledzer, Academician of the RAS G. S. Golitsyn**

*A.M. Obukhov Institute of the Physics of Atmosphere, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

Received November 27, 2018

Kaula's empirical rule has been known for more than 50 years: the coefficients of expansion over spherical harmonics for the fluctuations of the gravitational field and terrain of the planets decrease as the number of the harmonic squared. This was found for Venus, the Moon, Mars, the asteroid Vesta, and very small celestial bodies. The inverse-square line spectra were also found for various types of the Earth's surface on a scale of up to a hundred kilometers. From this it follows that the spectra of the terrain slope angles are constant, i.e., "white noise". This, they are delta-correlated horizontally. These are the assumptions under which the random walk laws were derived by A.N. Kolmogorov in 1934. Using them, the equation of the horizontal probability diffusion of the terrain with the linear coefficient diffusion  $D$  is derived. Based on the empirical data,  $D = 1.3 \pm 0.3$  m for the Earth, while for Venus it is almost an order of magnitude less. The slopes resist the wind; the rock crumbles, and the water flows down the slopes as well. This consideration turns Kaula's rule into the random walk laws (over terrain) developed by Kolmogorov in 1934.

*Keywords:* spectrum of relief, inclination angles, white noise, random walks.