ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 5, с. 539–544

МАТЕМАТИКА

УДК 511.334+511.335

ЗАДАЧА ХОУЛИ О КОЛИЧЕСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА СУММОЙ КВАДРАТА И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Член-корреспондент РАН **В. А. Быковский***, **А. В. Устинов****

Поступило 08.10.2018 г.

В работе для задачи Хоули о количестве представления натурального числа суммой квадрата и произведения впервые получена степенная оценка для остаточного члена.

Ключевые слова: аналитическая теория чисел, спектральная теория автоморфных функций, функция числа делителей.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524855539-544

Пусть $d \equiv 0{,}1 \pmod 4$ — натуральное число (положительный дискриминант), отличное от квадрата. Положим

$$N(d) = \sum_{4n_1n_2+b^2=d} 1 = \sum_{b^2<d;b^2\equiv d \pmod 4} \tau\left(\frac{d-b^2}{4}\right),$$

где b — целое, n_1 и n_2 — натуральные числа, а $\tau(n) = \tau_{1/2}(n)$ с

$$\tau_s(n) = \sum_{n=n_1n_2} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{s-1/2} = n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n).$$

Каждый дискриминант d однозначно представляется в виде $d = Dn^2$, где $n = n(d)$ — натуральное число, а $D = D(d)$ — фундаментальный дискриминант с $n(D) = 1$.

Пусть

$$\Lambda_u(d) = d^u L_D(2u)\eta_u(n;\, D)\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(u+\frac{1}{2}\right)}{4^u\Gamma(u)\zeta(4u)},$$

где

$$\eta_u(n;\, D) = \sum_{l\setminus n}\left(\frac{D}{l}\right)\frac{\mu(l)}{l^{2u}}\sigma_{1-4u}\left(\frac{n}{l}\right).$$

Положим

$$L_D(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

$$A(d) = \lim_{u\to 1/2}(\Lambda_u(d)\zeta(2u) + \Lambda_{1-u}(d)\zeta(2-2u)) =$$

$$= \Lambda'_{1/2}(d) + 2\gamma\Lambda_{1/2}(d) = \frac{3}{\pi^2}\sqrt{d}L_D(1)\eta_{1/2}(n;\, D)\times$$

$$\times\left(\ln d + 2\gamma + 2\frac{L'_D(1)}{L_D(1)} + \frac{\eta'_{1/2}(n;\, D)}{\eta_{1/2}(n;\, D)} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(u+1/2)}{4^u\Gamma(u)\zeta(4u)}\right)\bigg|_{u=1/2}\right)$$

с постоянной Эйлера γ.

Пусть

$$N(d) = A(d) + R(d).$$

Хоули [1] доказал, что для $d \equiv 0 \pmod 4$

$$R(d) \ll A(d)\frac{\ln\ln d}{\ln d}.$$

Опираясь на спектральную теорию автоморфных функций, мы доказываем более сильный результат.

Т е о р е м а 1. *Для некоторого* $\delta > 0$

$$R(d) \ll d^{1/2-\delta}.$$

Пусть $\psi\colon (0,\,1) \to \mathbb{C}$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем и для натурального q

$$\delta_q(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } a \equiv 0 \pmod q, \\ 0, \text{ если } a \not\equiv 0 \pmod q. \end{cases}$$

Тогда для любого комплексного u

$$A(\psi;\, d;\, u) = \sum_{b^2<d;b^2\equiv d \pmod 4} \tau_u\left(\frac{d-b^2}{4}\right)\psi\left(\frac{|b|}{\sqrt{d}}\right) =$$

$$= \sum_{b^2<\sqrt{d}} \delta_4(b^2-d)\left(\frac{d-b^2}{4}\right)^{u-1/2}\sigma_{1-2u}\left(\frac{d-b^2}{4}\right)\times$$

$$\times\psi\left(\frac{|b|}{\sqrt{d}}\right) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^{2u-1}}\cdot\sum_{b \pmod{2c}}\delta_{4c}(b^2-d)\times$$

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

**E-mail*: *vab@iam.khv.ru*

***E-mail*: *ustinov@iam.khv.ru*

$$\times \sum_{(2cl+b)^2<d} \left(\frac{d-(2cl+b)^2}{4}\right)^{u-1/2} \psi\left(\frac{|2cl+b|}{\sqrt{d}}\right) = $$
$$= \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{b(\mathrm{mod}\, 2c)} \delta_{4c}(b^2-d) \times$$
$$\times \sum_{\left(l+\frac{b}{2c}\right)^2<\frac{d}{4c^2}} \left(\frac{d}{4c^2}-\left(l+\frac{b}{2c}\right)^2\right)^{u-1/2} \psi\left(\frac{\left|l+\frac{b}{2c}\right|}{\frac{\sqrt{d}}{2c}}\right).$$

С помощью формулы суммирования Пуассона преобразуем внутреннюю сумму по l к виду

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{4c^2}-\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2\right)^{u-1/2} \psi\left(\frac{\left|x+\frac{b}{2c}\right|}{\frac{\sqrt{d}}{2c}}\right) e^{-2\pi imx}dx = $$
$$= \left(\frac{\sqrt{d}}{2c}\right)^{2u} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i\frac{mb}{2c}} \hat{\psi}_u\left(\frac{\pi|m|\sqrt{d}}{c}\right),$$

где

$$\hat{\psi}_u(y) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{u-1/2}\psi(|x|)e^{-ixy}dx = $$
$$= 2\int_0^1 (1-x^2)^{u-1/2}\psi(x)\cos(xy)dx.$$

Пусть

$$S_d(c;\, m) = \sum_{b(\mathrm{mod}\, 2c)} \delta_{4c}(b^2-d)e^{2\pi i\frac{mb}{2c}} = S_d(c;\, -m).$$

Тогда

$$A(\psi;\, d;\, u) = A_0(\psi;\, d;\, u) + 2\sum_{m=1}^{\infty} A_m(\psi;\, d;\, u)$$

с

$$A_m(\psi;\, d;\, u) = \left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{2u} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_d(c;\, m)}{c^{2u}} \hat{\psi}_u\left(\frac{\pi|m|\sqrt{d}}{c}\right).$$

При $\mathrm{Re}\, u > 1/2$

$$A_0(\psi;\, d;\, u) = \left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{2u} \left(\sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_d(c;\, 0)}{c^{2u}}\right) \hat{\psi}_u(0),$$

а при $m > 0$

$$A_m(\psi;\, d;\, u) = \frac{d^{1/4}}{2^{2u}(\pi m)^{2u-1/2}} \times$$
$$\times \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_d(c;\, m)}{\sqrt{c}} \left(\frac{\pi m\sqrt{d}}{c}\right)^{2u-1/2} \hat{\psi}_u\left(\frac{\pi m\sqrt{d}}{c}\right).$$

Мультипликативная группа $SL_2(\mathbb{Z})$, состоящая из матриц

$$M = \begin{pmatrix} m & n \\ l & h \end{pmatrix}, \quad m,\, n,\, l,\, h \in \mathbb{Z};\ \det(M) = 1,$$

действует слева на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid x,\, y \in \mathbb{R};\, y > 0\}$$

посредством дробно-линейных преобразований

$$M(z) = \frac{mz+n}{lz+h}.$$

Поскольку $M(z) = (-M)(z)$, то M и $-M$ обычно отождествляют и вместо $SL_2(\mathbb{Z})$ работают с фактор-группой

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) \Big/ \left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

На пространстве автоморфных относительно Γ функций $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, для которых

$$f(M(z)) = f(z) \quad \forall M \in \Gamma,$$

действуют оператор отражения

$$Tf(z) = f(-\bar{z})$$

и операторы Гекке

$$T(n)f(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{n=n_1n_2} \sum_{0\le m<n_2} f\left(\frac{n_1z+m}{n_2}\right),$$

которые коммутируют между собой и с Γ-инвариантным дифференциальным оператором

$$\Delta = -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Важнейшим примером автоморфных функций является ряд Эйзенштейна

$$E(z;\, s) = \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \mathrm{Im}^s M(z) = $$
$$= y^s + \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-1/2)\zeta(2s-1)}{\Gamma(s)\zeta(2s)} y^{1-s} +$$
$$+ \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)\zeta(2s)} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \tau_s(|n|)\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}.$$

При этом

$$TE(\ldots;\, s) = E(\ldots;\, s),\quad T(n)E(\ldots;\, s) = \tau_s(n)E(\ldots;\, s),$$
$$\Delta E(\ldots;\, s) = s(1-s)E(\ldots;\, s).$$

Обозначим через $\mathcal{L}_2(\Gamma\setminus\mathbb{H})$ пространство автоморфных функций со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2\rangle = \iint_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y^2}.$$

Из собственных функций дискретного спектра оператора Δ в $\mathcal{L}_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$, отличных от константы, можно выбрать ортонормированную последовательность форм Маасса

$$u_j(z), \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

с

$$Tu_j = \eta_j u_j, \quad \eta_j \in \{-1, 1\},$$
$$T(n)u_j = \lambda_j(n)u_j, \quad \lambda_j(n) \in \mathbb{R}.$$

При этом для любой функции f из $\mathcal{L}_2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ имеет место спектральное разложение

$$f(z) = \frac{3}{\pi}\iint_{\Gamma\setminus\mathbb{H}} f(z)\frac{dxdy}{y^2} + \sum_{j=1}^{\infty}\langle f, u_j\rangle u_j(z) + $$
$$+ \frac{1}{4\pi i}\int_{\mathrm{Re}(s)=0}\left\langle f, E\left(\ldots; \frac{1}{2}+s\right)\right\rangle E\left(z; \frac{1}{2}+s\right)ds,$$

которое выполняется поточечно при некоторых естественных ограничениях на f (см. [2] или [3]).

Пусть

$$\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 | \, b^2 - 4ac = d\}$$

есть множество коэффициентов неопределённых квадратичных форм

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$$

дискриминанта d. Группа Γ действует слева на $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ по правилу

$$M\colon \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \to M\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}M^t =$$
$$= \begin{pmatrix} a(M) & b(M)/2 \\ b(M)/2 & c(M) \end{pmatrix}.$$

Оно соответствует линейной замене переменных X и Y для квадратичной формы

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2 \to (MQ)(X, Y) =$$
$$= Q(mX + lY, nX + hY) =$$
$$= a(M)X^2 + b(M)XY + c(M)Y^2.$$

Сопоставим каждой точке (a, b, c) из $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ ориентированную полуокружность

$$\{z \in \mathbb{H} | \, a - b\,\mathrm{Re}\, z + c|z|^2 = 0\}$$

с параметрическим представлением

$$L(\varphi) = \mathcal{P}_d(a, b, c)(\varphi) =$$
$$= \mathrm{Ce}(L) + \mathrm{Ra}(L)\exp(\mathrm{sign}(c)i\varphi), \quad 0 < \varphi < \pi,$$

где

$$\mathrm{Ce}(L) = \frac{b}{2c}, \quad \mathrm{Ra}(L) = \frac{\sqrt{d}}{2c}.$$

Она начинается из точки $x_1 = \mathrm{Ce}(L) + \mathrm{Ra}(L)$ и кончается в $x_2 = \mathrm{Ce}(L) - \mathrm{Ra}(L)$ — корнях квадратного уравнения $a - bx + cx^2 = 0$. Преобразование $(a, b, c) \to (-a, -b, -c)$ меняет ориентацию элементов множества

$$\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) = \mathcal{P}_d(\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d))$$

на противоположную. При этом для любого элемента M из Γ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) \\ \mathcal{P}_d \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_d \\ \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) & \xrightarrow{M} & \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) \end{array}$$

коммунитативна. Стабилизатор Γ_L любого элемента L из $\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)$ — бесконечная циклическая группа. Её образующую M_L выберем так, чтобы переход от точки z по дуге L к $M_L(z)$ соответствовал ориентации L. При этом для любой точки z из L в качестве $\Gamma_L \setminus L$ можно выбрать дугу $[z, M_L(z))$.

Для дискриминантов d на линейном пространстве непрерывных автоморфных функций определим линейный функционал

$$\Omega_d(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{-1/2}\sum_{L\in\Gamma\setminus\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)}\int_{\Gamma_L\setminus L} f(z)\sqrt{d\zeta^2}$$

с Γ-инвариантной метрикой

$$d\zeta^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Функции u_j с $\eta_j = 1$ называются чётными, а с $\eta_j = -1$ нечётными. С помощью инволюции $(a, b, c) \to (a, -b, c)$ на $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ получаем, что

$$\Omega_d(u_j) = \Omega_d(Tu_j) = \eta_j\Omega_d(u_j).$$

Поэтому для нечётных u_j выполняется равенство

$$\Omega_d(u_j) = 0.$$

В работе [4] было доказано, что

$$\Omega_{Dn^2} = \sum_{l\setminus n}\left(\frac{D}{l}\right)\frac{\mu(l)}{\sqrt{l}}\Omega_D T\left(\frac{n}{l}\right).$$

Пусть k — натуральное число. Голоморфная на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ функция f называется параболической формой веса $2k$, если для любого элемента M из Γ

$$(f|_{2k}\, M)(z) = (lz + h)^{-2k} f(M(z)) = f(z)$$

и автоморфная функция $y^k|f(z)|$ ограничена на $\mathbb{H}$. Обозначим через S_{2k} линейное пространство всех параболических форм веса $2k$ со скалярным произведением Петерсона

$$\langle f, g\rangle_{2k} = \iint\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^{2k-2}dxdy.$$

Оно конечномерно и

$$\dim S_{2k} = \begin{cases}[k/6], \text{ если } k \not\equiv 1 \pmod 6,\\ [k/6]-1, \text{ если } k \equiv 1 \pmod 6.\end{cases}$$

В частности, S_{2k} пусто для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ и одномерно для $k = 6, 8, 9, 10, 11, 13$. Операторы Гекке на S_{2k} определяются по формуле

$$T_{2k}(n)f(z) = n^{k-1/2}\sum_{n_1n_2=n} n_2^{-2k}\sum_{0\le m<n_2} f\left(\frac{n_1z+m}{n_2}\right).$$

Функционалы Шинтани (см. [5]) на S_{2k} определяются по формуле

$$\Omega_d^{(2k)}(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{-k-\frac{1}{2}}\sum_{L\in\Gamma\backslash\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)}\int\limits_{\Gamma_L\backslash L} g_L(z)dz$$

с инвариантной относительно Γ_L дифференциальной формой

$$g_L(z)dz = (a(L)-b(L)z+c(L)z^2)^{k-1}f(z)dz,$$

где $(a(L), b(L), c(L)) = \mathcal{P}_d^{-1}(L)$. Поскольку инволюция $(a, b, c)\to(-a, -b, -c)$ коммутирует с действием Γ на $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$, то для нечётных k

$$\Omega_d^{(2k)}(f) = -\Omega_d^{(2k)}(f) = 0.$$

Отметим также, что

$$\Omega_{Dn^2}^{(2k)} = \sum_{l\backslash n}\left(\frac{D}{l}\right)\frac{\mu(l)}{\sqrt{l}}\Omega_D^{(2k)}T_{2k}\left(\frac{n}{l}\right).$$

Выберем в S_{2k} ортонормированный базис O_{2k}, состоящий из функций f с

$$T_{2k}(n)f = \lambda_f(n)f, \quad \lambda(f)\in\mathbb{R}.$$

Для функций u_j из $\mathcal{L}_2(\Gamma\setminus\mathbb{H})$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$u_j(z) = {\sum_{n=-\infty}^{\infty}}{}' \rho_j(n)\sqrt{y}K_{i\kappa_j}(2\pi|n|y)e^{2\pi inx}$$

с $\kappa_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4}$ и для $n>0$

$$\rho_j(n) = \lambda_j(n)\rho_j(1), \quad \rho_j(-n) = \eta_j\lambda_j(n)\rho_j(1).$$

Любая функция f из O_{2k} разлагается в ряд Фурье

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1/2}\rho_f(n)e^{2\pi inz}$$

с

$$\rho_f(n) = \lambda_f(n)\rho_f(1).$$

Конен [6] доказал, что для чётных k и любого натурального m

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{c}}S_d(c;m)J_{k-1/2}\left(\frac{\pi m\sqrt{d}}{c}\right) = \\ = \frac{2}{(16\pi)^k}\frac{\Gamma(2k-1)}{\Gamma(k)}\cdot\sum_{f\in O_{2k}}\overline{\rho_f(m)}\Omega_d^{(2k)}(f).$$

В [7] (см. также [8]) было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ψ: $(0, 1)\to\mathbb{C}$ трижды непрерывно дифференцируемая функция с $\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0$ и для которого $\delta>0$ при $y\to\infty$*

$$\psi'''(y) = O(y^{-9/2-\delta}).$$

Тогда для любого натурального m

$$\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{c}}S_d(c;m)\psi\left(\frac{\pi m\sqrt{d}}{c}\right) = \\ = \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(e)}\frac{h(i\kappa_j)}{\operatorname{ch}\pi\kappa_j|\Gamma(1/4+i\kappa_j/2)|^2}\overline{\rho_j(m)}\Omega_d(u_j) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}(s)=0}\frac{h(s)}{\cos\pi s\Gamma(1/4+s/2)\Gamma(1/4-s/2)}\times \\ \times\frac{\pi^{1/2-s}\tau_{1/2-s}(m)}{\Gamma(1/2-s)\zeta(1-2s)}\Omega_d\left(E\left(\ldots;\ \frac{1}{2}+s\right)\right)ds + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}^{(e)}(-1)^k\frac{\Gamma(k+1/2)}{(4\pi)^k}h\left(k-\frac{1}{2}\right)\times \\ \times\sum_{f\in O_{2k}}\overline{\rho_f(m)}\Omega_d^{(2k)}(f),$$

где (e) над знаком суммирования означает, что в сумме участвуют только такие j, для которых u_j — чётная функция в первом случае и чётные k — во втором.

При этом

$$h(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^{\infty}\Phi(s;y)\psi(y)\frac{dy}{y},$$

где

$$\Phi(s;y) = \frac{2\pi}{\sin\pi s}\times \\ \times\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi s}{2}\right)J_{-s}(y) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi s}{2}\right)J_s(y)\right).$$

При $\operatorname{Re} u > \frac{1}{2}$

$$A_0(\psi;\ d;\ u) = 2\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{2^{2u}}\times$$
$$\times\Omega_d(E(\ldots;\ 2u))\int\limits_0^1(1-x^2)^{u-1/2}\psi(x)dx.$$

Напомним, что при $\mathrm{Re}(u) > 1 + |\mathrm{Re}(s)|$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\tau_{1/2+s}(m)}{m^u} = \zeta(u+s)\zeta(u-s).$$

Пусть при $\mathrm{Re}(u) > 1$

$$\mathcal{L}_j(u) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(m)}{m^u},\quad \mathcal{L}_f(u) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(m)}{m^u}.$$

С помощью теоремы 2 при $\mathrm{Re}(u) > \frac{3}{4}$ получаем следующие утверждение.

Теорема 3. *Для* $\mathrm{Re}(u) > \frac{3}{4}$

$$A(\psi;\ d;\ u) = A_0(\psi;\ d;\ u) + d^{1/4}R(\psi;\ d;\ u),$$

где

$$R(\psi;\ d;\ u) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}{}^{(e)}\frac{h(i\kappa_j)}{\mathrm{ch}\pi\kappa_j|\Gamma(1/4+i\kappa_j/2)|^2}\overline{\rho_j(1)}\mathcal{L}_j\left(2u-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\Omega_d(u_j) + \frac{1}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=0}\frac{h(s)}{\cos\pi s\Gamma(1/4+s/2)\Gamma(1/4-s/2)}\times$$
$$\times\frac{\pi^{1/2-s}}{\Gamma(1/2-s)\zeta(1-2s)}\zeta\left(2u-\frac{1}{2}+s\right)\zeta\left(2u-\frac{1}{2}-s\right)\times$$
$$\times\Omega_d\left(E\left(\ldots;\ \frac{1}{2}+s\right)\right)ds +$$
$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}{}^{(e)}(-1)^{k/2}\frac{\Gamma(k+1/2)}{(4\pi)^k}h\left(k-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{f\in O_{2k}}\overline{\rho_f(1)}\mathcal{L}_f\left(2u-\frac{1}{2}\right)\Omega_d(u_j)$$

с

$$h_u(s) = \frac{\pi}{(4\pi)^{2u}}\cdot\int\limits_0^{\infty}\Phi(s;\ y)\hat{\psi}_u(y)\frac{dy}{y}.$$

С помощью табличного интеграла (см. [9])

$$\int\limits_0^{\infty}y^{\lambda}J_{\nu}(y)\cos(xy)dy =$$
$$= 2^{\lambda}\frac{\Gamma\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)}F\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2},\ \frac{1-\lambda+\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ x^2\right),$$
$$0 < x < 1,\ -\mathrm{Re}\,\nu < 1 + \mathrm{Re}\,\lambda < \frac{3}{2},$$

получаем, что

$$h_u(s) = \frac{\sqrt{2}\pi}{(2\pi)^{2u}}\Gamma\left(u-\frac{1}{4}+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(u-\frac{1}{4}-\frac{s}{2}\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^1(1-x^2)^{u-1/2}\times$$
$$\times F\left(u-\frac{1}{4}+\frac{s}{2},\ u-\frac{1}{4}-\frac{s}{2};\ \frac{1}{2};\ x^2\right)\psi(x)dx.$$

Подынтегральное выражение во втором слагаемом правой части тождества теоремы 3 при $\mathrm{Re}\,u = \frac{3}{4}$ имеет полюсы в точках $s = \frac{3}{2} - 2u$ и $s = 2u - \frac{3}{2}$. Принимая во внимание этот факт, с помощью аналитического продолжения по u получим ещё одно утверждение.

Теорема 4. *Для* $\mathrm{Re}(u) > \frac{3}{4}$

$$A(\psi;\ d;\ u) = A_0(\psi;\ d;\ u) + A_0(\psi;\ d;\ 1-u) +$$
$$+ d^{1/4}R(\psi;\ d;\ u).$$

Опираясь на оценки $\mathcal{L}_j(s)$ и $\mathcal{L}_f(s)$ на вертикальной прямой $\mathrm{Re}\,s = 1/2$ (см., например, [3]), а также для $\Omega_d(u_j)$ и $\Omega_d(f)$ с f из O_{2k} (см. [10] и [11]), стандартными методами сглаживания из теоремы 4 получим утверждение теоремы 1. При этом мы пользуемся тождеством из работы [4]

$$\Omega_d(E(\ldots;\ s)) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{-1/2}d^{s/2}\frac{\Gamma^2(s/2)}{\Gamma(s)}\cdot\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S_d(c;\ 0)}{c^s} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{d}}{2}\right)^{-1/2}d^{s/2}\frac{\Gamma^2(s/2)}{\Gamma(s)}\times$$
$$\times\left(\sum_{l\backslash n}\left(\frac{D}{l}\right)\frac{\mu(l)}{\sqrt{l}}\tau_s\left(\frac{n}{l}\right)\right)\zeta(s)L_D(s).$$

Источник финансирования. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 18–41–05001).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hooley C.* On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product // Math. Zeitschr. 1958. Bd. 69. P. 211–217.

2. *Иванец Х.*, *Ковальский Э.* Аналитическая теория чисел. М.: МЦНМО, 2014. 712 с.
3. *Motohashi Y.* Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 240 p.
4. *Zagier D.* Eisenstein Series and the Riemann Zeta-Function. In: Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic. Bombay: Tata Inst., 1979. P. 275–901.
5. *Shintani T.* On Construction of Holomorphic Cups Forms of Half-Integral Weight // Nagoya Math. J. 1975. V. 58. P. 83–126.
6. *Kohnen W.* Fourier Coefficients of Modular Forms of Half-Integral Weight // Math. Ann. 1985. V. 271. № 2. P. 237–268.
7. *Быковский В.А.* Некоторые формулы суммирования арифметического типа и их приложения. Владивосток: Вычисл. центр ДВНЦ АН СССР, 1986. 40 с.
8. *Быковский В.А.* Арифметические средние и L-ряды автоморфных форм. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. 68 с.
9. *Градштейн И.С.*, *Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
10. *Duke W.* Hyperbolic Distribution Problems and Half-Integral Weight // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 73–90.
11. *Blomer V.*, *Harcos G.* Hybrid Bounds for Twisted L-Finctions // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 621. P. 53–79.

ON THE HOOLEY'S PROBLEM ON THE REPRESENTATION OF A NUMBER AS THE SUM OF A SQUARE AND A PRODUCT

Corresponding Member of the RAS V. A. Bykovskii, A. V. Ustinov

Pacific National University, Khabarovsk, Russian Federation

Received October 10, 2018

The article is devoted to the Hooley's problem on the representation of a number as the sum of a square and a product. For the first time we show that number of solutions satisfy an asymptotic formula with power saving in error term.

Keywords: analytic number theory, spectral theory of automorphic functions, number-of-divisors function.