ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 5, с. 545–547

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.27

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ С КУСОЧНО-ГЁЛЬДЕРОВЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ В СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

Ю. Г. Смирнов*, А. А. Цупак**

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым 03.12.2018 г.

Поступило 03.12.2018 г.

Рассматривается задача восстановления кусочно-гёльдеровой функции, описывающей коэффициент преломления неоднородного препятствия монохроматической волны. Краевая задача дифракции сводится к системе интегральных уравнений. Доказывается эквивалентность интегральной и дифференциальной постановок задачи дифракции. Предложен двухшаговый метод решения обратной задачи. На первом шаге решается линейное интегральное уравнение первого рода; получены достаточные условия единственности решения интегрального уравнения первого рода в классе кусочно-постоянных функций. На втором шаге неизвестный коэффициент преломления явно выражается через полученное на первом шаге решение.

Ключевые слова: обратная задача дифракции, восстановление кусочно-непрерывного показателя преломления, интегральные уравнения, единственность решения.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524855545-547

При исследовании обратных задач возникает проблема отыскания решений таких задач по измерениям поля вне рассеивателя. Основным подходом к исследованию обратных задач является решение систем дифференциальных уравнений методом конечных разностей или конечных элементов с последующей минимизацией функционала и регуляризацией по Тихонову. В данной работе предложен новый (двухшаговый) метод решения обратной задачи, основанный на решении линейного интегрального уравнения. В предлагаемом методе не используются итерационные схемы, требующие выбора хорошего начального приближения.

В однородном трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ с заданным волновым числом $k_0 = \dfrac{\omega}{c} > 0$ ($\omega > 0$ — круговая частота) расположен параллелепипед $P = \{x = (x_1, x_2, x_3)\colon a_m < x_m < b_m\}$. На P введены узлы $x_{m,i_m} = a_m + h_m i_m$, $h_m = \dfrac{b_m - a_m}{n}$ ($m = 1, 2, 3, 0 \le i_m \le n$) и параллелепипеды $\Pi_I = \{x\colon x_{m,i_m} < x_m < x_{m,i_m+1}\}$, $0 \le i_m \le n-1$. Здесь и далее I — мультииндекс $(i_1 i_2 i_3)$ Область P характеризуется показателем преломления $n(x) = \dfrac{k(x)}{k_0}$, где $k(x) = \sum\limits_I \chi_I(x) k_I(x)$, $k_I(x)$ непрерывны по Гёльдеру в Π_I, $k_I \in C^{0,\alpha}(\Pi_I)$, $0 < \alpha \le 1$, а

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_I, \\ 0, & x \notin \Pi_I. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть E_P — объединение рёбер параллелепипедов Π_I, $\partial\Pi'_I = \partial\Pi_I \setminus E_P$ и $\partial P' = \partial P \setminus E_P$.

Поле источника, а также рассеянное и полное поле предполагаются гармонически зависящими от времени: $U_0(x, t) = u_0(x)e^{-i\omega t}$, $U_s(x, t) = u_s(x)e^{-i\omega t}$, $U = U_0 + U_s$. Будем рассматривать точечный источник поля, полагая

$$u_0(x) = \frac{e^{ik_0|x - x_0|}}{4\pi|x - x_0|}, \quad x_0 \notin \bar{P}. \tag{2}$$

Прямая задача дифракции состоит в отыскании функции $u(x)$:

$$u \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}) \bigcap_I C^2(\Pi_I) \bigcap C^2(\mathbb{R}^3 \setminus (\bar{P} \cup \{x_0\})), \tag{3}$$

такой, что

$$\begin{gathered} (\Delta + k_I^2(x))u(x) = 0, \quad x \in \Pi_I, \\ (\Delta + k_0^2 u(x) = -\delta(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{P}, \\ [u]|_{\partial\Pi_I} = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]\Bigg|_{\partial\Pi'_I} = 0, \\ u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3), \\ \frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_0 u_s + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r := |x| \to \infty. \end{gathered} \tag{4}$$

Пензенский государственный университет

**E-mail*: *smirnovyug@mail.ru*

***E-mail*: *altsupak@yandex.ru*

Решение задачи (4), удовлетворяющее условиям гладкости (3), называется её квазиклассическим решением. Верно [1]

Утверждение 1. *Задача* (3), (4) *имеет при* $\operatorname{Im} k(x) \ge 0$ *не более одного решения.*

Задача дифракции (3), (4) сводится [1] к системе, состоящей из уравнения Липпмана—Швингера в области P:

$$Lu := u(x) - \int_P (k^2(y) - k_0^2) G(x, y) u(y) dy = u_0(x), \quad x \in P, \tag{5}$$

и интегрального представления поля вне P:

$$u(x) = u_0(x) + \int_P (k^2(y) - k_0^2) G(x, y) u(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (P \cup \{x_0\}). \tag{6}$$

Уравнение (5) рассматривается в пространстве $L_2(P)$; оператор L: $L_2(P) \to L_2(P)$ непрерывно обратим [2]. Имеет место [1]

Утверждение 2. *Если* $u \in L_2(P)$ *— решение уравнения* (5), *то продолжение* $u(x)$ *в* $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_0\}$ *формулой* (6) *удовлетворяет условиям* (3).

В следующем утверждении установлена эквивалентность краевой задачи (3), (4) и системы интегральных уравнений (5), (6).

Утверждение 3. *Всякое решение* $u(x)$ *задачи* (3), (4) *удовлетворяет системе* (5), (6). *Обратно, если* $u \in L_2(P)$ *— решение* (5), *то функция* $u(x)$, *продолженная согласно* (6), *— решение задачи* (3), (4).

Постановка обратной задачи. Пусть D — такая ограниченная область, что $\bar{D} \cap \bar{P} = \phi$, волновое число k_0 фиксировано. Требуется восстановить функцию $k(x)$ в P по значениям поля $u(x)$ и падающей волны $u_0(x)$ в точках $x \in D, x_0 \notin \bar{D}$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_P (k^2(y) - k_0^2) G(x, y) u(y) dy = u(x) - u_0(x) \equiv u_s(x), \quad x \in D, \tag{7}$$

и уравнению

$$u(x) - \int_P (k^2(y) - k_0^2) G(x, y) u(y) dy = u_0(x), \quad x \in P. \tag{8}$$

Введём в области P функцию $J(x) = (k^2(x) - k_0^2) u(x)$, предполагая, что всюду в P выполнено условие $\min_{x \in \bar{P}} |k(x)| > k_0$. В сообщении предлагается двухшаговый метод восстановления функции $k(x)$, состоящий в следующем:

1. Находим $J(x)$ в области P по известным значениям $u_0(x)$ и $u(x)$ в области D из линейного уравнения первого рода

$$\int_P G(x, y) J(y) dy = u_s(x), \quad x \in D; \tag{9}$$

2. Находим явно функцию $k(x)$ в точках области P из уравнения

$$\frac{J(x)}{k^2(x) - k_0^2} - \int_P G(x, y) J(y) dy = u_0(x), \quad x \in P. \tag{10}$$

Рассмотрим пример. Пусть область P есть куб $(-1; 1)^3$, введём функцию $\psi(x) = (1 - x_1^2)^2 (1 - x_3{}^2)^2 \times (1 - x_3^2)^2$ и определим $J(x) = -(\Delta + k_0^2)\psi(x)$. Поскольку ψ удовлетворяет однородным краевым условиям $\psi|_{\partial P} = \left.\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial P'} = 0$, то, применяя вторую формулу Грина, получаем $\psi(x) = \int_P G(x, y) J(y) dy$. Тогда для потенциала $v(x) = \int_P G(x, y) J(y) dy$ $(x \in \mathbb{R}^3)$ при $x \in P$ имеем $v(x) = \psi(x)$, но $v \equiv 0$ вне $\bar{P}$ [1]. Таким образом, однородное уравнение (9) имеет нетривиальные гладкие решения при любых k_0. Поэтому ниже будем рассматривать конечномерную обратную задачу.

Введём разбиение $\sigma = \{\Pi_I\}$ области P; через $\mathcal{C}_\sigma(P)$ обозначим класс кусочно-постоянных на P функций $J(x) = \sum_I J_I \chi_I(x)$ (J_I — коэффициенты), а через $\mathcal{AC}_\sigma(D)$ — класс образов функций из $\mathcal{C}_\sigma(P)$ при действии оператором $Av(x) = \int_P G(x, y) v(y) dy, x \in D$.

Теорема 1. *Если при заданном разбиении* σ *тела* P *на* n^3 *элементов* Π_I *выполнено* $k_0 > \frac{\pi^2 n^3}{2l}$, $l = \min_i |b_i - a_i|$, *то уравнение*

$$\int_P G(x, y) J(y) dy = 0, \quad x \in D, \tag{11}$$

имеет лишь тривиальное решение $J \equiv 0$ *в классе* $\mathcal{C}_\sigma(P)$.

Доказательство теоремы 1 сводится [1] к проверке невырожденности матрицы Грама $\Gamma(k_0, n)$ системы функций вида $\exp(ik_0 x \cdot r_I)$ на двухмерной единичной сфере $S_1(0)$. Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$, а $r_I = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3)$, $i_k = 0, 1, \ldots, n$.

Учитывая аналитическую зависимость определителя матрицы Грама от k_0 как функции комплексного переменного при произвольном $n \in \mathbb{N}$, получаем следующий результат.

Теорема 2. *Уравнение* (11) *имеет лишь тривиальное решение в классе* $\mathcal{C}_\sigma(P)$ *при каждом* $n \in \mathbb{N}$ *и любых* $k_0 > 0$ *за исключением, быть может, конечного числа значений волнового числа* k_0.

Также имеет место

Теорема 3. *Если* $u_s \in \mathcal{AC}_\sigma(D)$, *то решение уравнения* (9) *существует*.

Таким образом, в теоремах 1–3 получены достаточные условия существования и единственности решения интегрального уравнения (9), а в силу однозначности представления $k(x)$ через $J(x)$ — условия существования и единственности решения обратной задачи.

Источники финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 18–01–00219 А) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 1.894.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Medvedik M., Smirnov Yu., Tsupak A.* Inverse Problem of Diffraction by an Inhomogeneous Solid with a Piecewise Hölder Refractive Index. arXiv:1803.04701.
2. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: Русайнс, 2016. 226 с.

ON THE UNIQUENESS OF A SOLUTION TO AN INVERSE PROBLEM OF SCATTERING BY AN INHOMOGENEOUS SOLID WITH A PIECEWISE HÖLDER REFRACTIVE INDEX IN A SPECIAL FUNCTION CLASS

Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak

Penza State University, Penza, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov December 3, 2018

Received December 3, 2018

The problem of reconstructing a piecewise Hölder continuous function describing the refractive index of an inhomogeneous obstacle scattering a monochromatic wave is considered. The boundary value scattering problem is reduced to a system of integral equations. The equivalence of the integral and differential formulations of the problem is proved. A two-step method for solving the inverse problem is proposed. A linear integral equation of the first kind is solved at the first step. Sufficient conditions for the uniqueness of its solution in the class of piecewise constant functions are obtained. At the second step, the unknown refractive index is explicitly expressed in terms of the solution obtained at the first step.

Keywords: inverse scattering problem, reconstruction of piecewise continuous refractive index, integral equations, uniqueness of solutions.