ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 5, с. 548–552

МАТЕМАТИКА

УДК 519.214

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛИНДЕБЕРГА—ФЕЛЛЕРА

Э. Л. Пресман[1,*], Ш. К. Форманов[2,]**

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 03.10.2018 г.

Поступило 26.11.2018 г.

В теореме Линдеберга—Феллера фигурирует условие Линдеберга, выполнение которого надо проверять для любого $\varepsilon > 0$. В работе формулируется не зависящее от ε условие в терминах некоторого обобщения моментов порядка $2 + \alpha$ и показывается, что это условие эквивалентно условию Линдеберга и из выполнения этого условия для некоторого $\alpha > 0$ следует его выполнение для любого $\alpha > 0$. В неклассической постановке (при отсутствии условия равномерной бесконечной малости) В.И. Ротарь сформулировал аналог условия Линдеберга в терминах вторых псевдомоментов. В работе приводится такая же не зависящая от ε модификация и этого условия. Кроме того, обсуждаются варианты простых доказательств теорем Линдеберга—Феллера и Ротаря и некоторые связанные с этими вопросами неравенства.

Ключевые слова: теорема Линдеберга—Феллера, характеристики Линдеберга, Ротаря, Ибрагимова—Осипова—Эссеена, классические и неклассические варианты центральной предельной теоремы.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524855548-552

1. Введение. В работе рассматривается схема серий независимых (внутри серии) случайных величин с конечными дисперсиями. Классическая теорема Линдеберга—Феллера утверждает, что в случае выполнения условия равномерной бесконечной малости (которое в рассматриваемом случае эквивалентно условию Феллера равномерной бесконечной малости дисперсий) справедливость центральной предельной теоремы эквивалентна выполнению условия Линдеберга (см. теорему A раздела 2).

В работах [1] и [2] была получена оценка характеристики Линдеберга, из которой сразу получается необходимость условия Линдеберга. В разделе 3 формулируется соответствующий результат (теорема B ниже) и приводится простое доказательство достаточности условия Линдеберга. Соответствующее доказательство использует характеристику Ибрагимова—Осипова—Эссена (см. [3, 4]). Стремление к нулю этой характеристики эквивалентно выполнению условия Линдеберга, а её преимущество состоит в том, что она не зависит от ε.

Недостатком условия Линдеберга является то, что его выполнение надо проверять для любого $\varepsilon > 0$. В разделе 4 мы вводим новую характеристику, которая не зависит от ε, описываем её свойства и показываем, что стремление к нулю этой характеристики эквивалентно условию Линдеберга (теорема 1).

В разделе 5 рассматривается неклассическая постановка, когда не выполняется условие равномерной бесконечной малости. В работе [5] Ротарь ввёл характеристику, которая является аналогом характеристики Линдеберга, и стремление этой характеристики к нулю является необходимым и достаточным условием для справедливости центральной предельной теоремы (см. теорему C ниже). Мы приводим оценку для характеристики Ротаря (теорема 2). Как и в случае условия Линдеберга, мы приводим не зависящую от ε модификацию условия Ротаря (теорема 3).

2. Формулировка теоремы Линдеберга—Феллера. Пусть $X_{n1}, X_{n2}, \ldots, X_{nk_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, — схема серий независимых (внутри серии) случайных величин, $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Будем считать, что

$$EX_{nj} = 0, \quad EX_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, k_n,$$

$$S_n = X_{n1} + \ldots + X_{nk_n}, \quad \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = 1.$$

Положим

$$F_n(x) = P(S_n < x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

$$\Delta_n = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|.$$

[1] *Центральный экономико-математический институт Российской Академии наук, Москва*

[2] *Институт математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент*

**E-mail*: *presman@cemi.rssi.ru*

***E-mail*: *shakirformanov@yandex.ru*

Будем говорить, что рассматриваемая схема серий $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n\}$ удовлетворяет условию Линдеберга, если

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k_n} E(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{L}$$

(здесь и в дальнейшем $I(A)$ обозначает индикатор события A).

Хорошо известно, что при выполнении условия (L)

$$\Delta_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

что и представляет собой содержание центральной предельной теоремы (ЦПТ). Простые примеры показывают, что условие Линдеберга (L) не является необходимым для справедливости ЦПТ. В связи с этим обстоятельством вводится следующее условие Феллера:

$$\max_{1 \le j \le k_n} \sigma_{nj} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{F}$$

В свою очередь, условие (F) обеспечивает выполнение условия равномерной бесконечной малости схемы серий $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n\}$, т.е.

$$\max_{1 \le j \le k_n} P(|X_{nj}| \ge \varepsilon) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{U}$$

Задача о справедливости ЦПТ для схемы серий $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n\}$, удовлетворяющих условию равномерной бесконечной малости, находит своё окончательное решение в следующей теореме Линдеберга—Феллера (см., например, [6, глава III, § 4, теорема 3, с. 427]).

Теорема А. *Для того чтобы схема серий $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n\}$ удовлетворяла условию Феллера* (F) *и* ЦПТ, *необходимо и достаточно выполнения условия Линдеберга* (L).

Теорему Линдеберга—Феллера можно представить в виде следующей схемы импликаций: (F) & (ЦПТ) $\Leftrightarrow$ (L).

3. Оценки числовых характеристик, использующихся в ЦПТ, и достаточность условия (L). В работах [1, 2] приведена следующая оценка характеристики Линдеберга $L_n(\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Теорема В. *Существует такая абсолютная константа $C > 0$, что*

$$(1 - e^{-\varepsilon^2/4}) \sum_{j=1}^{k_n} E(X_{nj}^2 I(|X_{nj}| > \varepsilon)) \le C\left(\Delta_n + \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^4\right) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Из этой оценки сразу вытекает необходимость условия (L) в теореме А (т.е. справедливость импликации (F) & (ЦПТ) $\Rightarrow$ (L)), поскольку в силу условия $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^2 = 1$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{nj}^4 \le \max_{1 \le j \le k_n} \sigma_{nj}^2 \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Ниже мы приводим простое доказательство достаточности условия (L) в теореме Линдеберга—Феллера, т.е. справедливость импликации (L) $\Rightarrow$ (F) & (ЦПТ).

Предварительно введём обозначения

$$P(X_{nj} < x) = F_{nj}(x), \quad \Phi_{nj}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nj}}\right),$$

$$f_{nj}(t) = Ee^{itX_{nj}}, \quad g_{nj}(t) = e^{-\sigma_{nj}^2 t^2/2}, \quad j = 1, 2, \ldots, k_n.$$

Далее воспользуемся числовой характеристикой Ибрагимова—Осипова—Эссеена

$$d_n = L_n(1) + \sum_{j=1}^{k_n} \left| \int_{|x| \le 1} x^3 dF_{nj}(x) \right| + \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \le 1} x^4 dF_{nj}(x),$$

введённой в работах [3, 4]. Нетрудно видеть, что

$$(\mathrm{L}) \Rightarrow (\mathrm{F}). \tag{2}$$

В работе [1, глава 2, пункт 2.1, с. 19—20] доказано следующее

Предложение 1. *Справедливо соотношение эквивалентности*

$$L = \{L_n(\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty \quad \forall \varepsilon > 0\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \{d_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty\}. \tag{3}$$

При помощи несложных рассуждений можно убедиться в том, что имеет место

Предложение 2. *Для любого $t \in R$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{k_n} |f_{nj}(t) - g_{nj}(t)| \le C \max(t^2, t^4) d_n. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем C обозначает некоторую абсолютную константу, различную в различных местах.

Положим $f_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t)$. Тогда из соотношений (3) и (4) следует, что при любом $T > 0$

$$\sup_{|t| \le T} |f_n(t) - e^{-t^2/2}| = \sup_{|t| \le T} \left| \prod_{j=1}^{k_n} f_{nj}(t) - \prod_{j=1}^{k_n} g_{nj}(t) \right| \le \le \sup_{|t| \le T} \sum_{j=1}^{k_n} |f_{nj}(t) - g_{nj}(t)| = O(d_n). \tag{5}$$

Отсюда и из (2) вытекает достаточность условия Линдеберга (L) для выполнения условия Феллера (F) и справедливости ЦПТ для схемы серий $\{X_{nj},$ $1 \le j \le k_n\}$.

Замечание. Очевидно, что условие Линдеберга (L), играющее важную роль в задачах справедливости ЦПТ, выглядит в определённом смысле "избыточным". На самом деле в силу монотонности характеристики Линдеберга по ε выполнение условия Линдеберга (L) достаточно проверить, например, только для всех $0 < \varepsilon \le 1$. Введённое выше условие $\{d_n \to 0$ при $n \to \infty\}$ не зависит от ε, а поэтому его использование в доказательстве теоремы Линдеберга—Феллера вполне оправданно и целесообразно.

4. Другая модификация условия Линдеберга. Положим

$$L_n^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{k_n}\left[\int_{|x|\le 1}|x|^{2+\alpha}dF_{nj}(x) + \int_{|x|\ge 1}|x|^2 dF_{nj}(x)\right], \quad \alpha > 0.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. а) *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)} = 0$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)} = 0 \quad \forall\alpha > 0;$$

б) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)} = 0$ $\forall\alpha > 0$;

в) *для того чтобы схема серий* $\{X_{nj},\ 1 \le j \le k_n\}$ *удовлетворяла условию Феллера* (F) *и* ЦПТ, *необходимо и достаточно*, *чтобы существовало такое* $\alpha > 0$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^{(\alpha)} = 0$.

Доказательство теоремы 1 следует из приводимой ниже леммы 2.

5. Неклассические варианты ЦПТ. Предельные теоремы, доказанные без привлечения условия (U), принято называть неклассическими. Первые неклассические варианты ЦПТ приведены в учебнике А.Н. Ширяева ([6, глава III, § 5, с. 433–437, 495]).

Используя обозначение $\Phi_{nj}(x) = \Phi(x/\sigma_{nj})$ (функция распределения нормального закона с параметрами $(0,\ \sigma_{nj}^2)$), положим

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k_n}\int_{|x|>\varepsilon}|x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Теорема C (В.И. Ротарь [5]). *Для того чтобы имела место* ЦПТ, *необходимо и достаточно выполнения следующего условия*:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\varepsilon) \to 0 \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{R}$$

Приведённая теорема C представляет собой обобщение теоремы Линдеберга—Феллера и является неклассическим вариантом ЦПТ (в ней отсутствует условие равномерной бесконечной малости (U)).

В следующей теореме приводятся оценки величины $R_n(\varepsilon)$ через Δ_n и $L_n(\varepsilon)$. Эти оценки имеют самостоятельный интерес.

Теорема 2. *При некотором* $c = c(\varepsilon)$

$$R_n(\varepsilon) \le c(\varepsilon)\left[L_n(\varepsilon) + \left(\max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}\right)^{2s}\right] \quad \forall s \ge 2,$$

$$R_n(\varepsilon) \le c(\varepsilon)\left[\Delta_n + \sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^4 + \left(\max_{1\le j\le k_n}\sigma_{nj}\right)^{2s}\right] \quad \forall s \ge 2.$$

Первая оценка в этой теореме доказывается при помощи следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1. *Для любой функции распределения* $F(x)$ *имеют место неравенства*

$$2\int_{\varepsilon}^{\infty} xF^*(x)dx \le \int_{|x|>\varepsilon} x^2 dF(x) \le \frac{9}{4}\int_{\varepsilon/3}^{\infty} xF^*(x)dx \quad \forall\varepsilon > 0,$$

где $F^*(x) = 1 - F(x) + F(-x)$, $x > 0$.

Вторая оценка следует из первой с учётом теоремы B.

Из теоремы 2, в частности, следует, что условие (R) является необходимым в теореме Линдеберга—Феллера. В силу соотношения (2) и из первой оценки величины $R_n(\varepsilon)$, приведённой в теореме 1, получаем, что имеет место импликация (L) ⇒ (R). В свою очередь, как доказано в книге [1, теорема 2, с. 464–465], если выполнено условие (F), то (R) ⇒ ⇒ (L). Следовательно, справедливо соотношение эквивалентности (F) & (R) ⇒ (L), и это утверждение вполне согласуется с теоремой Линдеберга—Феллера.

Недостатком условия (R) является то, что его нужно проверять для всех $\varepsilon > 0$. Ниже мы введём характеристику, стремление которой к нулю эквивалентно условию (R), но которая не зависит от ε. Положим

$$R_n^{(\alpha)} = \sum_{j=1}^{k_n}\left[\int_{|x|\le 1}|x|^{1+\alpha}|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx + \right.$$
$$\left. + \int_{|x|\ge 1}|x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx\right], \quad \alpha > 0.$$

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. а) *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\alpha)} = 0$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *то*

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\alpha)} = 0 \quad \forall\alpha > 0$;

б) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\alpha)} = 0$ $\forall\alpha > 0$;

в) *для того чтобы схема серий* $\{X_{nj}, 1 \le j \le k_n\}$ *с конечными дисперсиями удовлетворяла* ЦПТ, *необходимо и достаточно*, *чтобы существовало такое* $\alpha > 0$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(\alpha)} = 0$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. $R_n(\varepsilon) \le R_n^{(\alpha)}(1 + \bar{\varepsilon}^{\alpha})$, $L_n(\varepsilon) \le (1 + \bar{\varepsilon}^{\alpha})L_n^{(\alpha)}$ *для любых* $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$,

$R_n^{(\alpha)} \le \varepsilon^{\alpha} + R_n(\varepsilon)$, $L_n^{(\alpha)} \le \varepsilon^{\alpha} + L_n(\varepsilon)$ *для любых* $\alpha > 0$, $0 < \varepsilon < 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $R_n(\varepsilon)$ и $R_n^{(\alpha)}$. В силу определения $R_n(1) \le R_n^{(\alpha)}$ и $R_n(\varepsilon) \le R_n(1)$ при $\varepsilon \ge 1$. Если $0 < \varepsilon < 1$, то

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{\varepsilon\le|x|\le1} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx + R_n(1) \le$$
$$\le \varepsilon^{-\alpha}\sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\le1} |x|^{1+\alpha}|F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx + R_n(1) =$$
$$\le \varepsilon^{-\alpha}R_n + R_n(1) \le R_n^{(\alpha)}(1 + \bar{\varepsilon}^{\alpha}). \tag{6}$$

При $0 < \varepsilon < 1$

$$R_n^{(\alpha)} \le \varepsilon^{\alpha}\sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{\varepsilon\le|x|\le1} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx + R_n(1) \le$$
$$\le \varepsilon^{\alpha}\sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k_n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)|dx \le$$
$$\le \varepsilon^{\alpha}\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{nj}^2 + R_n(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha} + R_n(\varepsilon)$$

$\left(\text{из } \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 2\int\limits_{0}^{\infty} x(F(-x) + 1 - F(x))dx \text{ вытекает последнее неравенство}\right)$.

Случай $L_n(\varepsilon)$ и $L_n^{(\alpha)}$ рассматривается аналогично, что завершает доказательство леммы 2.

Перейдём к доказательству теоремы 3. Первая часть утверждения а) следует из первого неравенства в лемме 2. Утверждение б) следует из второго неравенства в лемме 2 и произвольности ε. Вторая часть утверждения а) следует из утверждения б) и первой части утверждения а). Утверждение в) теоремы 3 является простым следствием теоремы С и утверждений а) и б).

Теорема 1 доказывается аналогично.

Следует заметить, что независимое доказательство утверждения в) теоремы 3 можно было бы проводить, воспользовавшись модификацией известного метода Стейна в терминах характеристических функций, предложенной в работе [7] (при этом используется предложение 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hall P.* Rates of Convergence in the Central Limit Theorem. Boston; L.: Pitman Adv. Publ. Progr., 1984. 257 p.
2. *Chen Louis H.Y.*, *Qi-Man Shao*. Stein's Method for Normal Approximation. In: An Introduction to Stein's Method // Lect. Note. Ser. 4. 2005. P. 1—59.
3. *Ибрагимов И.А.*, *Осипов Л.В.* Об оценке остаточного члена в теореме Линдеберга // Теория вероятностей и её применения. 1966. Т. 11. № 1. С. 141—143.
4. *Esseen C.G.* On the Remainder Term in the Central Limit Theorem // Arkiv Math. 1968. V. 8. № 1. P. 7—15.
5. *Ротарь В.И.* К обобщению теоремы Линдеберга—Феллера // Мат. заметки. 1975. Т. 18. В. 1. С. 129—135.
6. *Ширяев А.Н.* Вероятность — 1. М.: МЦНМО, 2004. 520 с.
7. *Formanov Sh.K.*, *Formanova T.A.* The Stein—Tikhomirov Method and Berry—Esseen Inequality for Sampling Sum from a Finite Population of Independent Random Variables. Prokhorov and Contemporary Probability Theory // Springer Proc. Math. and Stat. 2013. V. 33. P. 261—275.

ON LINDEBERG—FELLER LIMIT THEOREM

E. L. Presman[1], Sh. K. Formanov[2]

[1] *Central Economics and Mathematics Institute*, *Russian Academy of Sciences*, *Moscow*, *Russian Federation*
[2] *Romanovskiy Institute of Mathematics*, *Academy of Sciences of Uzbekistan*, *Tashkent*, *Uzbekistan*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev October 3, 2018

Received November 26, 2018

In the Lindeberg—Feller theorem, the Lindeberg condition is present. The fulfillment of this condition must be checked for any $\varepsilon > 0$. We formulae a new condition in terms of some generalization of moments of order $2 + \alpha$, which does not depend on ε, and show that this condition is equivalent to the Lindeberg condition, and if this condition is valid for some $\alpha > 0$ then it is valid for any $\alpha > 0$. In the nonclassical setting (in the absence of conditions of a uniform infinitely smallness) V.I. Rotar formulated an analogue of the Lindeberg condition in terms of the second pseudo-momens. The paper presents the same modification of Rotar`s condition, which does not depend on ε. In addition, we discuss variants of the simpleproofs of theorems of Lindeberg—Feller and Rotar and some related inequalities.

Keywords: Lindeberg—Feller theorem, characteristics of Lindeberg, Rotar and Ibragimov—Osipov—Esseen, classical and non-classical versions of the Central Limit Theorem.