

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ИНДЕНТИРОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ ПОЛОСЫ

А. О. Ватульян*, Д. К. Плотников

Представлено академиком РАН В.А. Бабешко 25.07.2018 г.

Поступило 25.07.2018 г.

Представлена модель деформирования функционально-градиентной упругой полосы. Исследована задача о равновесии неоднородной упругой полосы под действием жесткого штампа параболической формы. Проведен сравнительный анализ построенных приближенных решений с решениями, построенными на основе метода конечных элементов для различных законов неоднородности полосы.

Ключевые слова: индентирование, контактная задача, неоднородная полоса, функционально-градиентный материал.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855564-567>

При изготовлении различных элементов инженерных конструкций с целью придания им желаемых свойств используется нанесение функционально-градиентных покрытий, причём важным этапом в их разработке и оптимизации является определение их свойств после технологического процесса нанесения. Отметим, что одним из наиболее распространённых способов идентификации свойств новых материалов, в том числе и покрытий, является метод индентирования [1–3].

В [4] на основе асимптотического анализа решения задачи о равновесии упругой однородной полосы построен ряд приближённых моделей контактного взаимодействия для тел с тонкими покрытиями и прослойками, приводящий к исследованию некоторых операторных уравнений, схожих с уравнением для модели Рейсснера [4].

Для неоднородных структур обычно исследование контактных задач осуществляется на основе решения интегрального уравнения с главной логарифмической частью в ядре, а символ ядра находится численно [5, 6].

В [7] представлены приближённые модели деформирования неоднородной упругой полосы, позволяющие получать аналитические решения контактной задачи. В основе формирования моделей лежат гипотезы о линейном изменении перемещений по толщине. Такие гипотезы позволяют строить приближённое решение контактной задачи для не-

прерывных законов неоднородности, однако, если свойства полосы изменяются разрывным образом, такие гипотезы не позволяют корректно учесть разрывы в компонентах тензора напряжений.

В настоящей работе представлена новая модель деформирования функционально-градиентной полосы, основанная на гипотезах, позволяющих учесть произвольные законы неоднородности покрытия, в том числе имеющие разрывы.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПОЛОСЫ

Рассмотрим задачу о контактном взаимодействии без трения жёсткого штампа параболической формы с неоднородной упругой полосой толщины h , жёстко сцепленной с недеформируемым основанием. С полосой связана прямоугольная система координат (x_1, x_3) с началом в основании полосы, ось x_3 направлена вверх, а коэффициенты Ляме полосы есть произвольные положительные функции координаты x_3 .

Для построения приближённой модели примем гипотезы относительно компонент вектора перемещений, полагая

$$\begin{aligned} u_1 &= \psi_1(x_3)u(x_1), & u_3 &= \psi_3(x_3)w(x_1), \\ \psi_1 &= \frac{g_1(x_3)}{g_1(h)}, & \psi_3 &= \frac{g_3(x_3)}{g_3(h)}, \\ g_1 &= \int_0^{x_3} \frac{1}{\mu} dx_3, & g_3 &= \int_0^{x_3} \frac{1}{\lambda + 2\mu} dx_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Функции $u(x_1)$ и $w(x_1)$ представляют собой перемещения верхней границы полосы. Принятые гипо-

Институт математики, механики

и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Южного федерального университета, Ростов-на-Дону

*E-mail: vatulyan@math.rsu.ru

тезы асимптотически удовлетворяют уравнениям равновесия, когда величина области контакта велика по сравнению с толщиной полосы. Отметим, что гипотезы (1) содержат параметры Ляме, и, таким образом, законы неоднородности полосы влияют на характер изменения перемещений по толщине, что позволяет учитывать произвольные законы неоднородности, в том числе содержащие разрывы.

Рассмотрим вспомогательную задачу о действии нормальной нагрузки $q(x_1)$, на участке $|x_1| \leq a$ верхней границы полосы. Для решения краевой задачи теории упругости используем приближённый подход, основанный на вариационном принципе Лагранжа. С учётом принятых гипотез о характере поля перемещения функционал потенциальной энергии упрощается и принимает вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (A_{11}u'^2 + 2(A_{12}u'w + A_{21}uw') + A_{20}w^2 + A_{10}u^2 + A_{22}w'^2) dx_1 - \int_{-a}^a q w dx_1, \quad (2)$$

где коэффициенты A_{ij} определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{10} &= \int_0^h \mu \psi_1'^2 dx_3, & A_{11} &= \int_0^h (\lambda + 2\mu) \psi_1'^2 dx_3, \\ A_{12} &= \int_0^h \lambda \psi_1 \psi_3' dx_3, & A_{20} &= \int_0^h (\lambda + 2\mu) \psi_3'^2 dx_3, \\ A_{21} &= \int_0^h \mu \psi_1' \psi_3 dx_3, & A_{22} &= \int_0^h \mu \psi_3^2 dx_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Варьируя функционал (2), получим уравнения Эйлера функционала (2) в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} -A_{11}u'' - (A_{12} - A_{21})w' + A_{10}u &= 0, \\ -A_{22}w'' + (A_{12} - A_{21})u' + A_{20}w &= q_*, \end{aligned} \quad (4)$$

причём $q_* = q(x_1)$, $|x_1| \leq a$, $q_* = 0$, $|x_1| > a$. Исключая из системы (4) перемещение u , получим операторное уравнение, связывающее вертикальное смещение на верхней границе полосы с нормальной нагрузкой:

$$b_2 w^{IV} - b_1 w'' + b_0 w = -a_1 q_*'' + a_0 q_*,$$

где коэффициенты a_i, b_i задаются формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= A_{10}, & a_1 &= A_{11}, & b_0 &= A_{10}A_{20}, \\ b_1 &= A_{10}A_{22} + A_{11}A_{20} - (A_{12} - A_{21})^2, & b_2 &= A_{11}A_{22} \end{aligned}$$

с условиями $w(x_1) \rightarrow 0$ ($x_1 \rightarrow \infty$), $w = -\delta + \frac{1}{2R} x_1^2$ ($|x_1| \leq a$); δ, R — глубина внедрения и радиус кривизны параболического штампа соответственно. Для

определения связи размера площадки контакта с величиной внедрения штампа служат стыковые условия в точках границы контактной области. Связь между силой, действующей на штамп, и глубиной внедрения определяется из условия равновесия штампа. Эти соотношения строятся аналитически и имеют вид

$$\begin{aligned} \delta &= R^{-1} \left(f_1(a) + \frac{1}{2} a^2 \right), \\ P &= R^{-1} (f_2(a) + p_1 a^3 + p_0 a), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(a) &= \frac{as_2 \operatorname{cth} ka + as_1 + s_0}{c_1 \operatorname{cth} ka + c_2}, \\ f_2(a) &= -2 \frac{a^2 A_{20} s_2 \operatorname{cth} ka + a^2 A_{20} s_0 + as_3 + s_4}{c_1 \operatorname{cth} ka + c_2}, \\ p_0 &= \frac{2}{A_{10}} ((A_{12} - A_{21})^2 - A_{10} A_{22}), \\ p_1 &= -\frac{2}{3} A_{20}, \quad k^2 = \frac{A_{10}}{A_{11}}, \end{aligned}$$

коэффициенты s_i, c_i зависят от A_{ij} .

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Ниже приведено сравнение решения контактной задачи по предложенной в настоящей работе модели с решением на основе метода конечных элементов. В качестве примера решена задача в случае линейного изменения модуля Юнга полосы по толщине и постоянного значения коэффициента Пуассона; модуль Юнга линейно возрастает от основания полосы и принимает вдвое большее значение на её верхней границе, $R/h = 10$. На рис. 1 представлена зависимость безразмерной силы $P_* = P/E_0 h$ от безразмерной величины внедрения $\delta_* = \delta/h$, где E_0 —

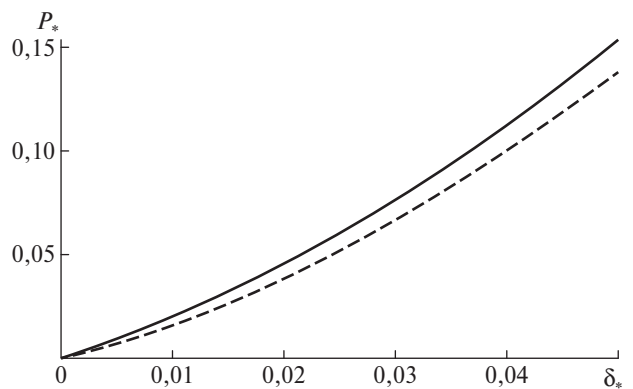


Рис. 1. Зависимость силы от глубины внедрения.

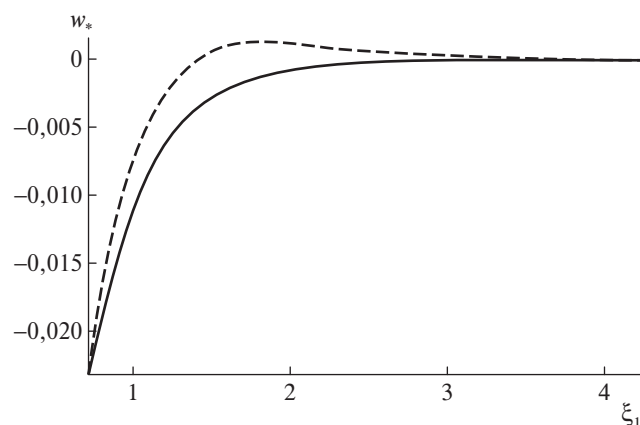


Рис. 2. Вертикальное смещение верхней границы полосы.

характерное значение модуля упругости в основании полосы. Сплошная и штриховая кривые соответствуют решениям по формуле (5) и МКЭ соответственно. При одинаковом внедрении приближённая модель даёт завышенные значения силы и максимального нормального напряжения под индентором. Погрешность решения по формуле (5) по сравнению с МКЭ для значений отношения $a/h \geq 0,94$ не превосходит 5%. На рис. 2 изображено безразмерное вертикальное смещение верхней границы полосы $w_* = w/h$ вблизи области контакта от безразмерной координаты $\xi_1 = x_1/h$. Также построено решение для полосы, состоящей из двух слоёв: относительно жёсткого покрытия и подложки. Для отношения модулей Юнга покрытия и подложки, равного 10, разница в решениях по формулам (5) и МКЭ не превышает 5% для величин $a/h \geq 1,19$; при $a/h \sim 0,1$ разница не превосходит 20%.

Построены решения контактной задачи для различных законов неоднородности в рамках модели (1). В качестве примеров выбраны возрастающий, убывающий и немонотонный законы, средние значения которых на отрезке $[0, h]$ равны. Анализ результатов показал, что для выбранных законов неоднородности различие в зависимостях сила—внедрение незначительно. На рис. 3 представлена зависимость безразмерной величины области контакта $a_* = a/h$ от безразмерного внедрения. Сплошной, штриховой и пунктирной кривыми изображены зависимости для возрастающего, убывающего, немонотонного законов изменения модуля Юнга соответственно. Таким образом, на основе предложенной полуаналитической модели исследованы задачи об индентировании функционально-градиентных

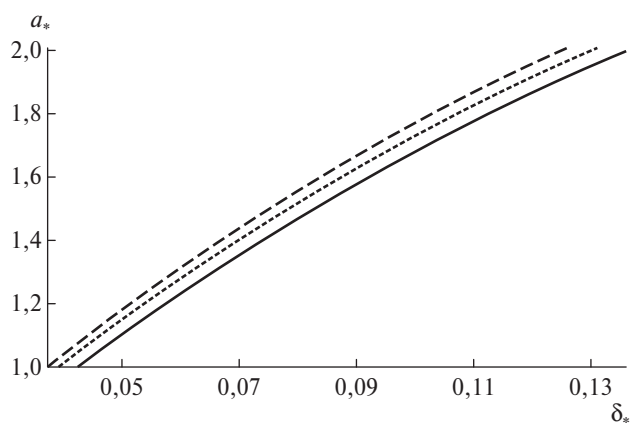


Рис. 3. Зависимость области контакта от глубины внедрения.

покрытий, произведена оценка погрешности модели.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 18–11–00069).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Epshtein S.A., Borodich F.M., Bull S.J.* Nanoindentation in Studying Mechanical Properties of Heterogeneous Materials // *J. Min. Sci.* 2016. V. 51. № 3. P. 470–476.
2. *Головин Ю.И.* Наноиндентирование и механические свойства твёрдых тел в субмикроразмерах, тонких поверхностных слоях и плёнках // *Физика тв. тела.* 2008. Т. 50. В. 12. С. 2113–2142.
3. *Oliver W.C., Pharr G.M.* Measurement of Hardness and Elastic Modulus by Instrumented Indentation: Advances in Understanding and Refinements to Methodology // *J. Mater. Res.* 2004. V. 19. № 1. P. 3–20.
4. *Александров В.М., Мхитарян С.М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
5. *Айзикович С.М., Александров В.М., Белоконов А.В., Кренин Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред. М.: Физматлит, 2006. 240 с.
6. *Волков С.С., Васильев А.С., Айзикович С.М., Селезнев Н.М., Леонтьева А.В.* Напряженно-деформированное состояние упругого мягкого функционально-градиентного покрытия при внедрении сферического индентора // *Вестн. Перм. нац. исследов. политехн. ун-та. Механика.* 2016. № 4. С. 20–34.
7. *Ватульян А.О., Плотников Д.К.* Об индентировании неоднородной полосы // *Экол. вестн. науч. центров ЧЭС.* 2017. № 3. С. 22–29.

ON A MODEL OF INDENTATION FOR A FUNCTIONALLY GRADED STRIP

A. O. Vatulyan, D. K. Plotnikov

*Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics, and Computer Science, Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Babeshko July 25, 2018

Received July 25, 2018

When different elements of engineering structures are manufactured, functionally graded coatings are applied to provide them with desired properties. The determination of the properties of the coatings after the coating process is an important stage in their development. Note that one of the most widely used techniques to identify the properties of new materials, including coatings, is the indentation method.

Keywords: indentation, contact problem, inhomogeneous strip, functionally graded material.