

УДК 532.526.4

СПЕКТР ЗАТУХАЮЩЕЙ ДВУМЕРНОЙ  
АВТОМОДЕЛЬНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

И. И. Вигдорович

Представлено академиком РАН А.Г. Куликовским 12.11.2018 г.

Поступило 12.11.2018 г.

Рассматривается затухающее двумерное однородное и изотропное турбулентное течение в автомодельном пределе, который достигается при больших значениях числа Рейнольдса, образованного по времени и кинетической энергии потока, если начальное значение усреднённой энтропии стремится к бесконечности при вязкости, стремящейся к нулю. В этом случае скорость диссипации энтропии имеет ненулевой конечный предел. Исследуются корреляционная функция поля завихренности и спектральная плотность энтропии в инерционном интервале расстояний и волновых чисел, где эти функции свободны от влияния вязкости и параметров крупномасштабного течения. Оказывается, что в затухающей двумерной автомодельной турбулентности инерционный интервал существует в физическом пространстве, но отсутствует в пространстве волновых чисел. Это означает, что турбулентные вихри соответствующего размера не дают вклада в спектральную плотность, а известный закон “минус первой степени” не выполняется. Спектральная плотность энтропии при больших волновых числах ведёт себя немонотонно — она сначала убывает быстрее, чем по закону “минус первой степени”, а затем в области диссипации имеет участок роста и второй максимум. При этом поток энтропии по спектру на левой границе области диссипации составляет только часть от скорости диссипации энтропии.

**Ключевые слова:** затухающая двумерная турбулентность, автомодельное однородное и изотропное турбулентное течение, спектральные функции.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855568-573>

1. Затухающая двумерная изотропная турбулентность описывается двумерными уравнениями Навье—Стокса, в которых внешние силы отсутствуют. Её основные свойства согласно Бэтчелору [1] следуют из того факта, что при плоском движении диссипация кинетической энергии стремится к нулю, когда вязкость жидкости  $\nu \rightarrow 0$ . В этом пределе средняя кинетическая энергия на единицу массы  $E$  сохраняется и является инвариантом рассматриваемого движения. Бэтчелор предполагал, что статистические характеристики турбулентности зависят только от двух определяющих параметров  $\nu$  и  $E$  и поэтому подчиняются автомодельным законам. Для энтропии, в частности, имеет место формула [1]

$$\frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle = \frac{A}{t^2}, \quad (1)$$

где  $A$  — безразмерная постоянная. Закон сохранения энергии

$$\frac{dE}{dt} = -\nu \langle \omega^2 \rangle = -\frac{2A\nu}{t^2}$$

Научно-исследовательский институт механики  
Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова  
E-mail: [vigdorovich@imec.msu.ru](mailto:vigdorovich@imec.msu.ru)

после интегрирования даёт равенство

$$E = V^2 + \frac{2A\nu}{t}, \quad V^2 = E(\infty),$$

из которого следует, что при  $\tau = tV^2/\nu \sim 1$ , когда оба слагаемых в правой части имеют один порядок величины, средняя кинетическая энергия течения изменяется на величину порядка  $V^2$ . Это происходит потому, что при  $\tau \sim 1$  согласно (1) энтропия имеет порядок  $V^4\nu^{-2}$ , а относительная скорость диссипации энергии — порядок единицы. Следовательно, в начальный момент времени энергия существенно отличается от  $V^2$ . Отсюда можно заключить, что автомодельное течение возникает при  $\tau \gg 1$ , если начальное поле скорости слабокоррелировано, имеет малый пространственный масштаб неоднородности, пропорциональный вязкости, и число Рейнольдса  $R_0 = V^2/\omega_0\nu$ , где  $\omega_0$  — корень из начального значения средней энтропии, имеет порядок единицы.

Согласно (1) автомодельное представление скорости диссипации энтропии

$$\chi = -\frac{d\langle \omega^2 \rangle}{2dt} \quad (2)$$

есть  $\chi = -At^{-3}$  и не зависит от вязкости. Это не противоречит строгому математическому результату Эйнка [2], согласно которому в двумерном течении в пределе исчезающей вязкости  $\chi \rightarrow 0$  при конечном начальном значении энстрофии, а предел  $\chi \neq 0$  возможен, если начальная энстрофия стремится к бесконечности, что как раз и достигается при условии  $R_0 \sim 1$ . Таким образом, автомодельное течение с начальной энстрофией  $\omega_0^2 \sim V^4 \nu^{-2}$  это именно тот случай, когда выполняется известная гипотеза Бэтчелора [1] о конечной ненулевой величине скорости диссипации энстрофии.

Другим известным результатом Бэтчелора [1] является закон “минус первой степени” для спектральной плотности энстрофии

$$\Omega(k, t) = C\chi^{2/3}k^{-1} \quad (3)$$

( $C$  — универсальная постоянная), который получен в предположении существования инерционного интервала волновых чисел, где эта величина зависит только от волнового числа  $k$  и  $\chi$ . Спектральная плотность энергии согласно (3) пропорциональна  $k^{-3}$ . Надо сказать, что данные прямого численного моделирования в отношении этого закона плохо согласуются друг с другом. Одна часть [3–6] подтверждает соотношение (3), другая [7–11] демонстрирует более сильное убывание  $\Omega \sim k^{-\alpha}$  с показателем степени  $\alpha > 1$ . Мы покажем, что для автомодельного течения закон “минус первой степени” выполняться не может, поскольку противоречит равенству (2), а происходит более быстрое убывание спектральной плотности энстрофии при больших волновых числах.

Таким образом, цель настоящей работы — выяснить, что даёт последовательное применение гипотезы Бэтчелора об автомодельности затухающего двумерного турбулентного течения.

2. Предположим, что предельное при  $\tau \rightarrow \infty$  автомодельное течение зависит от трёх определяющих параметров  $\nu$ ,  $V$  и  $\omega_0$ . Тогда для усреднённой энстрофии и скорости её диссипации из соображений размерности получим

$$\frac{1}{2}\langle \omega^2 \rangle = \frac{f(R_0)}{t^2}, \quad \chi = -\frac{2f(R_0)}{t^3}, \quad (4)$$

где  $f$  — универсальная функция. Соотношения (4), как и все последующие, получены при условии  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $R_0 = O(1)$ .

Поскольку  $V$  и  $Vt$  — характерные скорость и линейный размер крупномасштабного движения, спектральную плотность, характеризующую течение на больших масштабах, можно записать в виде

$$\Omega(k, t) = \frac{V}{t} g_e(K, R_0), \quad K = Vtk, \quad (5)$$

где  $g_e$  — универсальная функция.

Следуя Бэтчелору, мы будем считать, что существует прямой каскад энстрофии и параметр  $\chi$  определяет свойства затухающего двумерного турбулентного течения на масштабе диссипации. Тогда внутренний линейный масштаб определяется через величины  $\nu$  и  $\chi$  и равен  $\nu^{1/2}\chi^{-1/6}$ . Скорость пульсаций на этом масштабе имеет порядок  $\nu^{1/2}\chi^{1/6}$ . Поскольку величина  $\chi$  характеризует поток энстрофии от больших вихрей к малым, характерное время движения на всех масштабах (вплоть до масштаба диссипации энстрофии включительно) имеет один порядок величины  $\chi^{-1/3}$ . В соответствии с этими оценками и второй формулой (4) представление спектральной плотности на масштабе диссипации энстрофии имеет вид

$$\Omega(k, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t^3}} g_i(\kappa, R_0), \quad \kappa = k\sqrt{\nu t} = \frac{K}{\sqrt{\tau}}, \quad (6)$$

где  $g_i$  — универсальная функция.

Таким образом, имеются две области автомодельности — на больших и малых масштабах, где спектральная функция описывается автомодельными представлениями (5) и (6) соответственно.

3. В рассматриваемом случае однородной и изотропной двумерной турбулентности спектральная плотность вычисляется через корреляционную функцию поля завихренности  $\Phi(r, t) = \langle \omega(\mathbf{x}, t)\omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle$  по формуле [12]

$$\Omega(k, t) = \frac{k}{2} \int_0^\infty \Phi(r, t) J_0(kr) r dr, \quad (7)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка. В соответствии с приведёнными выше оценками введём при  $\tau \rightarrow \infty$  безразмерные корреляционные функции для двух характерных областей изменения  $r$ :

$$\Phi(r, t) = \frac{\phi_e(\eta, R_0)}{t^2}, \quad \eta = \frac{r}{Vt}, \quad (8)$$

$$\Phi(r, t) = \frac{\phi_i(\zeta, R_0)}{t^2}, \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{\nu t}} = \eta\sqrt{\tau}, \quad (9)$$

на большом масштабе и масштабе диссипации энстрофии соответственно.

Предположим, что существует инерционный интервал масштабов в физическом пространстве, т.е. такой диапазон значений  $r$ , которые много меньше внешнего масштаба течения, но много больше вязкого масштаба диссипации энстрофии, где  $\Phi$  не за-

висит ни от внешних параметров, ни от вязкости. Тогда представления (8) и (9) должны удовлетворять условию сращения

$$\phi_e(0, R_0) = \phi_i(\infty, R_0) = D(R_0), \quad (10)$$

где  $D$  — некоторая функция.

В силу пространственной однородности течения

$$\langle [\omega(\mathbf{x}, t) - \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)]^2 \rangle = 2\langle \omega^2 \rangle - 2\Phi,$$

откуда следует  $\Phi \leq \langle \omega^2 \rangle$  и поэтому с учётом (4)  $D < 2f$ . Таким образом, качественно функция  $\Phi$  имеет вид, показанный на рис. 1.

Корреляционные функции поля скорости второго и третьего порядка — двухточечные моменты второго и третьего порядка:

$$B_{LL}(r, t) = \langle u_1(\mathbf{x}, t) u_1(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle, \\ B_{LL,L}(r, t) = \langle u_1(\mathbf{x}, t) u_1(\mathbf{x}, t) u_1(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle,$$

(ось  $x_1$  направлена по вектору  $\mathbf{r}$ ) удовлетворяют уравнению Кармана—Ховарта [12]

$$r^3 \frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} r^3 \left( B_{LL,L} + 2\nu \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \right). \quad (11)$$

Из связи корреляционных функций полей скорости и завихренности [12]

$$\Phi(r, t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^2 B_{LL}(r, t) \quad (12)$$

следует, что в инерционном интервале

$$B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t) = \frac{D(R_0)r^2}{16t^2}. \quad (13)$$

Отсюда на основании уравнения Кармана—Ховарта (11)

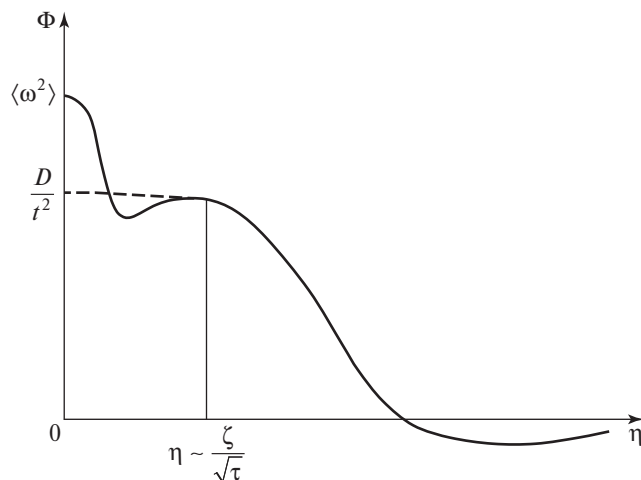


Рис. 1. Качественный вид корреляционной функции поля завихренности.

$$B_{LL,L}(r, t) = \frac{D(R_0)r^3}{48t^3}. \quad (14)$$

Соотношение (14) справедливо в инерционном интервале расстояний между двумя выбранными точками в затухающей двумерной автомодельной турбулентности и отличается от соответствующего соотношения, полученного для стационарного двумерного турбулентного течения, находящегося под воздействием внешней силы [13].

4. Подстановка представлений (8), (9) в интеграл (7) даёт

$$\Omega(k, t) = \frac{V}{2t} \left[ K \int_{\tau^{-1/4}}^{\infty} \eta \phi_e(\eta, R_0) J_0(K\eta) d\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau}} \int_0^{\tau^{1/4}} \zeta \phi_i(\zeta, R_0) J_0(\kappa\zeta) d\zeta \right]. \quad (15)$$

С учётом связи между переменными интегрирования  $\zeta = \eta\sqrt{\tau}$  первый интеграл (15) охватывает интервал изменения переменной  $\eta$ , целиком лежащий в области крупномасштабного движения, где справедливо представление (8), а второй — интервал изменения переменной  $\zeta$ , целиком лежащий в области диссипации энтропии, где справедливо представление (9). Прибавляя и вычитая интеграл

$$\frac{VK}{2t} \int_0^{\tau^{-1/4}} \eta \phi_e(\eta, R_0) J_0(K\eta) d\eta = \frac{V\kappa}{2t\sqrt{\tau}} \int_0^{\tau^{1/4}} \zeta \phi_e(\zeta\tau^{-1/2}, R_0) J_0(\kappa\zeta) d\zeta,$$

преобразуем (15) к виду

$$\Omega(k, t) = \frac{V}{2t} \left\{ K \int_0^{\infty} \eta \phi_e(\eta, R_0) J_0(K\eta) d\eta + \frac{\kappa}{\sqrt{\tau}} \int_0^{\tau^{1/4}} \zeta [\phi_i(\zeta, R_0) - \phi_e(\zeta\tau^{-1/2}, R_0)] J_0(\kappa\zeta) d\zeta \right\}. \quad (16)$$

Перейдём в (16) к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $K = O(1)$ . С учётом равенства  $\kappa = K\tau^{-1/2}$  самая грубая оценка для второго слагаемого —  $O(\tau^{-1/2})$ , и представление спектральной плотности в диапазоне волновых чисел, соответствующих крупномасштабному движению, есть

$$g_e(K, R_0) = \frac{K}{2} \int_0^{\infty} \eta \phi_e(\eta, R_0) J_0(K\eta) d\eta. \quad (17)$$

5. Нас интересует асимптотика интеграла (17) при  $K \rightarrow \infty$ , которую можно вычислить, если известна асимптотика функции  $\phi_e$  при  $\eta \rightarrow 0$  [14]. В соответствии с (10) предположим следующий вид этой асимптотики:

$$\phi_e(\eta, R_0) = D(R_0) - E(R_0)\eta^{\beta(R_0)} + \dots, \quad \eta \rightarrow 0, \quad (18)$$

где  $E$  и  $\beta$  — некоторые положительные функции. Согласно [14], нужно разложить  $\eta\phi_e$  в асимптотический ряд по степеням  $\eta$  и проинтегрировать его почленно, используя равенство

$$\int_0^\infty r^s J_\mu(kr) dr = \frac{2^s \Gamma((\mu + s + 1)/2)}{k^{s+1} \Gamma((\mu - s + 1)/2)}, \quad (19)$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция. В нашем случае порядок функции Бесселя  $\mu = 0$ . Причём формула (19) применяется при всех  $s > -\mu - 1$  без учёта области сходимости интеграла. (Интеграл сходится в полосе  $-\mu - 1 < \text{Re } s < 1/2$ , но правая часть (19) даёт его аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость переменной  $s$ .) В результате на основании (18) получим

$$g_e(K, R_0) = A(R_0)K^{-1-\beta(R_0)} + \dots, \quad K \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$A = \frac{\beta^2}{\pi} 2^{\beta-2} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\beta\right) \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\beta\right) E.$$

Первый член асимптотического разложения (18), как показывает формула (19), даёт нулевой вклад в асимптотику интеграла. В соотношении (20)  $\beta \neq 2$ , поскольку при  $\beta = 2$  функция  $A = 0$ , и асимптотику интеграла определяет следующий член разложения (18).

Аналогичным образом можно вычислить асимптотическое поведение потока энтропии по спектру, который выражается через корреляционную функцию третьего порядка по формуле [12]

$$\begin{aligned} \Pi(k, t) &= k^6 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r} [r^3 B_{LL,L}(r, t)] \times \\ &\times \left[ \frac{J_3(kr)}{(kr)^3} - \frac{J_2(kr)}{2(kr)^2} \right] dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Нас интересует диапазон больших волновых чисел, которые соответствуют малым значениям  $r$ , лежащим в инерционном интервале, где  $B_{LL,L}$  имеет асимптотику (14). Вычисление асимптотики интеграла (21) при  $k \rightarrow \infty$  на основе асимптотического представления (14) и формулы (19) даёт

$$\Pi_* = \Pi(k \rightarrow \infty, t) = \frac{D(R_0)}{t^3},$$

где  $\Pi_*$  — поток энтропии в области спектра на левой границе интервала диссипации энтропии. Поскольку  $D < 2f$ , этот поток меньше скорости диссипации энтропии  $\chi$ . Соотношение (14), таким образом, можно записать в виде  $B_{LL,L} = \Pi_* r^3 / 48$ . Эта формула справедлива как для затухающей, так и для стационарной турбулентности [13]. Различие состоит в том, что  $\Pi_* = \chi$  только в случае стационарной турбулентности [13].

6. Рассмотрим теперь второй интеграл (16). С учётом условия срачивания (10) выражение в квадратных скобках при  $\tau \rightarrow \infty$  на интервале интегрирования равномерно по  $\zeta$  стремится к величине  $\phi_i(\zeta, R_0) - D(R_0)$ , которая на основании (10) имеет при  $\zeta \rightarrow \infty$  нулевой предел. В пределе при  $\tau \rightarrow \infty$  и  $1/\kappa = O(1)$  с учётом асимптотического представления (20) и связи между безразмерными волновыми числами  $K = \kappa\sqrt{\tau}$  первый интеграл (16) стремится к нулю, а второй — на основании равенства (10) — равен

$$g_i(\kappa, R_0) = \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \zeta [\phi_i(\zeta, R_0) - D(R_0)] J_0(\kappa\zeta) d\zeta. \quad (22)$$

Это есть представление спектральной плотности в диапазоне волновых чисел, соответствующих мелкомасштабному движению. Исследуем свойства входящей в интеграл (22) функции  $\phi_i$ . В области диссипации энтропии введём безразмерные структурные функции поля скорости

$$\begin{aligned} B_{LL}(0, t) - B_{LL}(r, t) &= \frac{v}{t} b(\zeta, R_0), \\ B_{LL,L}(r, t) &= \left(\frac{v}{t}\right)^{3/2} h(\zeta, R_0). \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (11) даёт обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta^3 \left( b + \frac{1}{2} \zeta b' - 2f \right) = [\zeta^3 (h - 2b')]', \quad (23)$$

в котором мы учли равенство

$$\frac{d}{dt} B_{LL}(0, t) = -v \langle \omega^2 \rangle = -\frac{2\nu f}{t^2}$$

и выражение (4).

На основании (13) и (14) в инерционном интервале главные члены асимптотики функций  $b$  и  $h$  суть

$$b = \frac{D\zeta^2}{16} + \dots, \quad (24)$$

$$h = \frac{D\zeta^3}{48} + \dots, \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Нам придётся сделать некоторые предположения относительно следующих членов этих асимптотических разложений. Асимптотика правой части уравнения (23) в главном члене определяется представлением (25). На основании асимптотики (24)  $b' = O(\zeta)$ . Естественно предположить, что тот же (или меньший) порядок имеет следующий член асимптотического разложения величины  $h$ . Тогда из уравнения (23) следует, что следующий член асимптотики (24) есть некоторая величина  $D_1(R_0)$ . Теперь равенство (12) можно записать в виде

$$\zeta(\phi_i - D) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \left( b - \frac{D\zeta^2}{16} - D_1 \right), \quad (26)$$

что после интегрирования даёт равенство

$$\int_0^\infty \zeta(\phi_i - D) d\zeta = 0, \quad (27)$$

из которого следует, что функция  $\phi_i - D$  немонотонна и меняет знак, а функция  $\Phi$ , как показано на рис. 1, имеет по крайней мере два локальных максимума и минимума.

Рассмотрим теперь интеграл (22). Исходя из разложения функции Бесселя в нуле  $J_0(\kappa\zeta) = 1 + O(\kappa^2\zeta^2)$  и равенства (27), получим

$$g_i(\kappa, R_0) = o(\kappa), \quad \kappa \rightarrow 0. \quad (28)$$

7. Теперь для компенсированного спектра на основании (16)

$$t^2 k \Omega = K g_e(K, R_0) + \kappa g_i(\kappa, R_0). \quad (29)$$

Итак, исходя из предположения о существовании инерционного интервала масштабов в физическом пространстве, мы пришли к выводу об отсутствии такового в спектре автомодельной двумерной турбулентности. Иными словами, турбулентные вихри, имеющие размер, принадлежащий инерционному интервалу, не дают вклада в спектральную плотность, которая есть сумма двух функций (29), зависящих от внешнего параметра  $V$  и вязкости в силу определения безразмерных волновых чисел  $K$  и  $\kappa$ .

Согласно (29) и асимптотическим представлениям (20), (28), компенсированный спектр немонотонно зависит от волнового числа и при достаточно больших значениях  $\tau$  в диапазоне волновых чисел, для которых одновременно выполняются условия  $K \gg 1$  и  $\kappa \ll 1$ , должен иметь минимум. Значение компенсированного спектра в точке минимума при  $\tau \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Рассчитанная в [7, 10] спектральная плотность энергии ведёт себя в соответствии с соотношением (29). При больших значениях волнового числа она убывает по степенному закону с показателем степени, который уменьшается со временем, так что функция  $\beta$  растёт от нуля до значения, приблизительно равного двум.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Batchelor G.K. // Phys. Fluids Suppl. II. 1969. V. 12. P. 233–239.
2. Eyink G.L. // Nonlinearity. 2001. V. 14. № 4. P. 787–802.
3. Dmitruk P., Montgomery D.C. // Phys. Fluids. 2005. V. 17. 035114.
4. Dritschel D.G., Tran C.V., Scott R.K. // J. Fluid Mech. 2007. V. 591. P. 379–391.
5. Fox S., Davidson P.A. // J. Fluid Mech. 2010. V. 659. P. 351–364.
6. Lindborg E., Vallgren A. // Phys. Fluids. 2010. V. 22. 091704.
7. McWilliams J.C. // J. Fluid Mech. 1984. V. 146. P. 21–43.
8. Benzi R., Patarnello S., Santangelo P. // J. Phys. A. 1988. V. 21. № 5. P. 1221–1238.
9. Chasnov J.R. // Phys. Fluids. 1998. V. 9. P. 171–180.
10. Bracco A., McWilliams J.C., Murante G., Provenzale A., Weiss J.B. // Phys. Fluids. 2000. V. 12. № 11. P. 2931.
11. Dritschel D.G., Scott R.K., Macaskill C., Gottwald G.A., Tran C.V. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 094501.
12. Davidson P.A. Turbulence in Rotating Stratified and Electrically Conducting Fluids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
13. Lindborg E. // J. Fluid Mech. 1999. V. 388. P. 259–288.
14. MacKinnon R.F. // Math. Comput. 1972. V. 26. P. 515–527.



**THE SPECTRUM OF DECAYING 2D SELF-SIMILAR TURBULENCE****I. I. Vigdorovich***Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.G. Kulikovsky November 12, 2018

Received November 12, 2018

A decaying 2D homogeneous and isotropic turbulent flow is considered in the self-similar limit, which is achieved with large values of the Reynolds number formed using the time and kinetic energy of the flow if the initial value of the averaged enstrophy tends to infinity with the viscosity tending to zero. In this case, the enstrophy-dissipation rate has a nonzero finite limit. The correlation function of the vorticity field and the enstrophy spectral density in the inertial range of distances and wave numbers, where these functions are free from the effect of viscosity and large-scale flow parameters, is investigated. It turns out that the inertial range exists in the decaying 2D self-similar turbulence in physical space but is absent in the space of wavenumbers. This means that the turbulent vortices of the appropriate size do not contribute to the spectral density, and the well-known law of the first degree is not satisfied. At large wave numbers, the spectral density of enstrophy behaves nonmonotonically – it first decreases faster than the law of the minus first degree and, then, in the dissipation region, it has a growth segment and a second peak. In this case, the enstrophy flow along the spectrum on the left boundary of the dissipation region is only a fraction of the enstrophy-dissipation rate.

*Keywords:* freely decaying two-dimensional turbulence, self-similar homogeneous and isotropic turbulent flow, spectral functions.