

УДК 536.21

## АНАЛИЗ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Б. А. Зимин<sup>1</sup>, Ю. В. Судьенков<sup>2,3,\*</sup>

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 29.11.2018 г.

Поступило 10.12.2018 г.

В работе на основе приближённого решения дисперсионного уравнения представлен анализ системы уравнений динамической термоупругости с учётом обобщённого уравнения теплопроводности. Отмечается, что при волновом процессе теплопереноса реализуется достаточно интенсивный процесс энергообмена между тепловыми и упругими полями, при этом в зависимости от соотношений характерных времён релаксации может изменяться направление энергообмена.

*Ключевые слова:* термоупругость, теплопроводность, дисперсионный анализ, локально-неравновесные системы, время релаксации.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855574-578>

### ВВЕДЕНИЕ

Классическое линейное уравнение теплопроводности параболического типа описывает локально-равновесные процессы в предположении, что изменение теплового потока происходит одновременно с изменением градиента температуры. Однако интенсификация технологических процессов, использование материалов со сложной структурой, широкое распространение лазерной техники, возможность достижения экстремальных температур и давлений диктуют необходимость анализа поведения таких систем в экстремальных, локально-неравновесных условиях [1].

В работах [2, 3] предложен обобщённый закон теплопроводности Фурье для локально неравновесных сред, включающий параметр  $\tau_q$  — время термической релаксации среды, обусловленное фазовым запаздыванием между вектором теплового потока и градиентом температуры:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K \nabla T(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

В [3] при изучении процессов сверхбыстрого нагрева при попытке учесть вклады электронно-фононной и решёточной проводимости, а также и теп-

ловой инерции была представлена модель теплопроводности с двумя параметрами запаздывания  $\tau_q$  и  $\tau_T$  — временем запаздывания градиента температуры:

$$\left(1 + \tau_q \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K \left(1 + \tau_T \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla T(\mathbf{x}, t). \quad (2)$$

Значения этих параметров определяются теплоёмкостями решётки и электронного газа:

$$\tau_T = \frac{C_l}{G}, \tau_q = \frac{1}{G} \left( \frac{1}{C_l} + \frac{1}{C_e} \right)^{-1}, \chi = \frac{K}{C_l + C_e},$$

где  $C_l$ ,  $C_e$  — объёмные теплоёмкости решётки и электронного газа,  $K$  — коэффициент теплопроводности,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $G$  — коэффициент электрон-фононного взаимодействия [5].

Время термической релаксации  $\tau_q$ , связанное со средним временем столкновений электронов и фононов, было оценено для металлов, полупроводников и сверхпроводников от  $10^{-6}$  до  $10^{-12}$  с [6–8].

Двухпараметрическое уравнение (2) сводится к уравнению Каттанео—Вернотта (1) при  $\tau_T = 0$  и к классическому уравнению теплопроводности при  $\tau_T = \tau_q = 0$ .

Решение динамической задачи термоупругости в приближении локального равновесия было получено на основе классического уравнения теплопроводности Фурье [9, 10]. Аналитическое решение данной задачи с учётом обобщённого уравнения теплопроводности представляет значительные труд-

<sup>1</sup> Балтийский государственный технический университет “Военмех”, Санкт-Петербург

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский государственный университет

<sup>3</sup> Институт проблем машиноведения

Российской Академии наук, Санкт-Петербург

\*E-mail: sudenkov@land.ru

ности. Однако качественный анализ этой задачи и количественные оценки области применимости такой модели можно получить, основываясь на дисперсионном анализе системы уравнений динамической задачи термоупругости с обобщённым уравнением теплопереноса.

Для одноосного напряжённого состояния такая система запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \tau_T \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t} \right) = 0, \\ \chi(3\lambda + 2\mu) \left( \frac{\alpha_T}{K} \right) T_0 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} + \tau_q \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} \right) + \\ + \frac{\chi}{V_T^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \chi \tau_q \frac{\partial^3 T}{\partial z^2 \partial t} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Записав решение этой системы как

$$A(t, z) = \tilde{A}(\omega, t) \exp(-i\omega t + ikz),$$

получим систему однородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{u} \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) - \tilde{T} \beta k (i + \tau_T \omega) = 0, \\ \tilde{u} \chi (3\lambda + 2\mu) \frac{\alpha_T}{K} T_0 (\omega k - i \tau_q \omega^2 k) - \\ - \tilde{T} \left( \frac{\chi \omega^2}{V_T^2} + i\omega - \chi k^2 + i\omega k^2 \chi \tau_T \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы её коэффициентов равен нулю:

$$\begin{aligned} D(\omega, k) = (-k^2 + \omega^2/c^2) \times \\ \times (-\tau_q \omega^2 - i\omega + \chi k^2 - i\chi \tau_T k^2 \omega) + \\ + \delta (ik + \tau_T \omega k) (\omega k - i\tau_q k \omega^2) = 0, \\ \delta = \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{\rho^2 c_\epsilon c^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta$  — коэффициент связанности.

В [11] представлена методика приближённого решения дисперсионного уравнения (5), которое в общем случае является комплексным:

$$A(t, z) \sim \exp(-i\omega'(k)t) \cdot \exp(\omega''(k)t) \cdot \exp(ikz).$$

### АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ

При условиях  $\tau_q = 0, \tau_T = 0, \delta = 0$  и  $\tau_q = 0, \tau_T = 0, \delta \neq 0$  имеем классическую модель термоупругости с уравнением Фурье без учёта и с учётом связанности. Дисперсионная функция имеет простой вид:

$$D(\omega, k) = (-k^2 + \omega^2/c^2)(-i\omega + \chi k^2) + i\delta k^2 \omega. \quad (6)$$

Собственные частоты определяются из системы уравнений

$$\omega_1 = kc, \quad \omega_2 = -i\chi k^2. \quad (7)$$

Решение системы (7) определяет точку резонанса  $(\omega^*, k^*)$ , где сильно взаимодействие тепловых и упругих волн  $\omega^* = c^2/\chi, k^* = c/\chi$ . Для большинства металлов значение  $\omega^* \sim 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

Учёт связанности  $\delta \neq 0$  влияет только на затухание акустической моды ( $\alpha_{acoust}$ ), определяемое мнимым слагаемым в дисперсионном соотношении

$$\omega_1 = ck - i \frac{\delta c^2}{2\chi}. \quad (8)$$

Для металлов значение связанности порядка  $\delta \approx 10^{-4} - 10^{-2}$  и затухание упругих волн существенно только для коротковолновых процессов с  $k \geq (2-3) \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ .

Условия для однопараметрической модели теплопереноса:  $\tau_q \neq 0, \tau_T = 0$  при  $\delta = 0$  или  $\delta \neq 0$  — приводят к гиперболическому уравнению теплопроводности со скоростью распространения тепловой волны ( $V_T$ ), определяемой температуропроводностью и инерционностью потока тепла  $V_T^2 = \chi/\tau_q$ .

В случае отсутствия связанности ( $\delta = 0$ ) из решения уравнения (5) для акустических и тепловых мод и точки резонанса получим

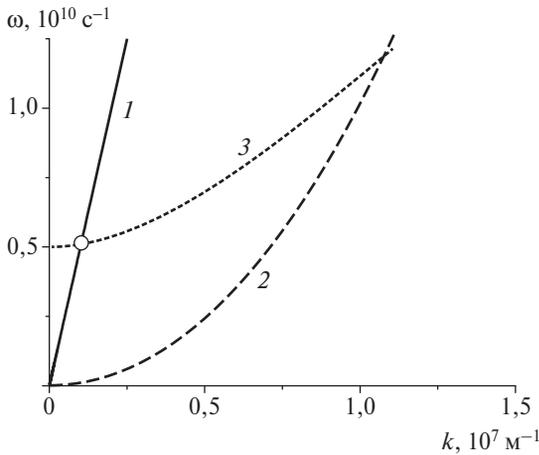
$$\omega_1 = ck, \quad \omega_2 = kV_T - i \frac{V_T^2}{2\chi}, \quad \omega^* = \frac{c^2}{\chi} \frac{1}{2|c^2/V_T^2 - 1|}. \quad (9)$$

Для типичных металлов  $\chi \sim 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}, c \sim 5 \times 10^3 \text{ м/с}$ , и оценка частоты резонанса при  $\tau_q = 10^{-10} \text{ с}$  даёт значения  $\omega^* \sim 5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}, k^* \sim 0,75 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$ , что более чем на порядок меньше, чем при использовании уравнения теплопроводности Фурье.

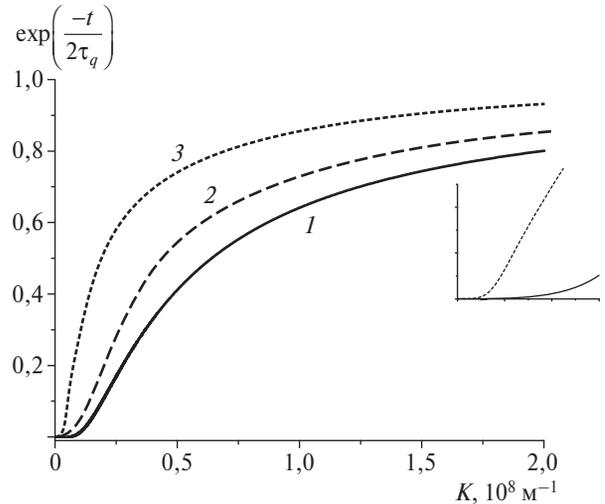
На рис. 1 приведены зависимости модулей частот акустических и тепловых ветвей для случая классической постановки динамической задачи термоупругости и для случая однопараметрической обобщённой модели теплопереноса при значении  $\tau_q = 10^{-10} \text{ с}$ .

Оказывается, что для случая применения однопараметрической модели при  $\tau_q = 10^{-10} \text{ с}$  волновой процесс переноса тепла реализуется лишь для частот  $\omega \geq 5 \cdot 10^9 \text{ рад/с}$ . Увеличение  $\tau_q$  уменьшает значения граничных и резонансных частот.

Такая ситуация обусловлена сильным затуханием тепловых мод ( $\alpha_{temp}$ ), обусловленным мнимым слагаемым в дисперсионном соотношении (9) для теп-



**Рис. 1.** Зависимости  $|\omega(k)|$  акустических и тепловых ветвей при классическом и однопараметрическом обобщённом уравнении теплопереноса: 1 —  $|\omega_1| = ck$ , 2 —  $|\omega_2| = \chi k^2$ , 3 —  $|\omega_3| = kV_T(1 + V_T^2)/(4\chi^2 k^2)^{0,5}$ .



**Рис. 2.** Зависимости затухания тепловых мод для разных значений инерционности потока тепла  $\tau_q$ ;  $\delta = 0$ ;  $\tau_q = 5 \cdot 10^{-10}$  (1),  $1 \cdot 10^{-10}$  (2),  $0,5 \cdot 10^{-10}$  с (3).

ловой волны:  $\frac{V_T^2}{2\chi} = \frac{1}{2\tau_q}$ , т.е. временем релаксации теплового потока. Зависимости затухания тепловых волн для разных значений  $\tau_q$  приведены на рис. 2, а на врезке — фрагмент выделенной области.

Видно, что вследствие очень сильного затухания волновой процесс теплопереноса с вектором  $k$ , меньшим некоторого порогового значения (больших длин волн), не может существовать.

В случае учёта связности ( $\delta \neq 0$ ) для акустических и тепловых мод получим

$$\omega_1 = ck - i \frac{\delta c^2}{2\chi} \frac{1}{\left|1 - \frac{(1-\delta)c^2}{V_T^2}\right|}, \quad (10)$$

$$\omega_2 = kV_T - i \frac{V_T^2}{2\chi}.$$

Связанность тепловых и упругих полей значительно уменьшает затухание высокочастотных акустических мод по сравнению с моделью динамической термоупругости с уравнением теплопроводности Фурье, т.е. в случае волнового процесса переноса тепла осуществляется обмен энергией между тепловыми и упругими волнами.

Для двухпараметрической модели теплопереноса без учёта связности:  $\tau_q \neq 0$ ,  $\tau_T \neq 0$ ,  $\delta = 0$  и соотношения  $\tau_T/\tau_q = n$ , обоснованного в [12] и для большинства металлов равного  $n \approx 1-10$ , получим

$$\omega_1 \approx kc - i \frac{2\chi k^2 n}{2(V_T^2/c^2 - 1)},$$

$$\omega_2 \approx kV - i \frac{V_T^2}{2\chi} \left[1 + k^2 \chi \tau_T \frac{1 + V_T^2/c^2}{1 - V_T^2/c^2}\right]. \quad (11)$$

В этом случае затухание акустических мод существует и в отсутствие связности и зависит от отношения времён релаксации  $n = \tau_T/\tau_q$ , а также от отношения скоростей тепловых и упругих волн. При этом влияние  $\tau_n$  на значение граничных частот существования волнового процесса теплопереноса практически отсутствует.

Для двухпараметрической модели теплопереноса с учётом связности  $\tau_q \neq 0$ ,  $\tau_T \neq 0$ ,  $\delta \neq 0$  получим

$$\omega_1 \approx kc - i \left[ \frac{\delta V_T^2 + k^2 n \chi (2\chi - \delta c^2 \tau_q)}{2\chi (V_T^2/c^2 + \delta(n+1) - 1)} \right], \quad (12)$$

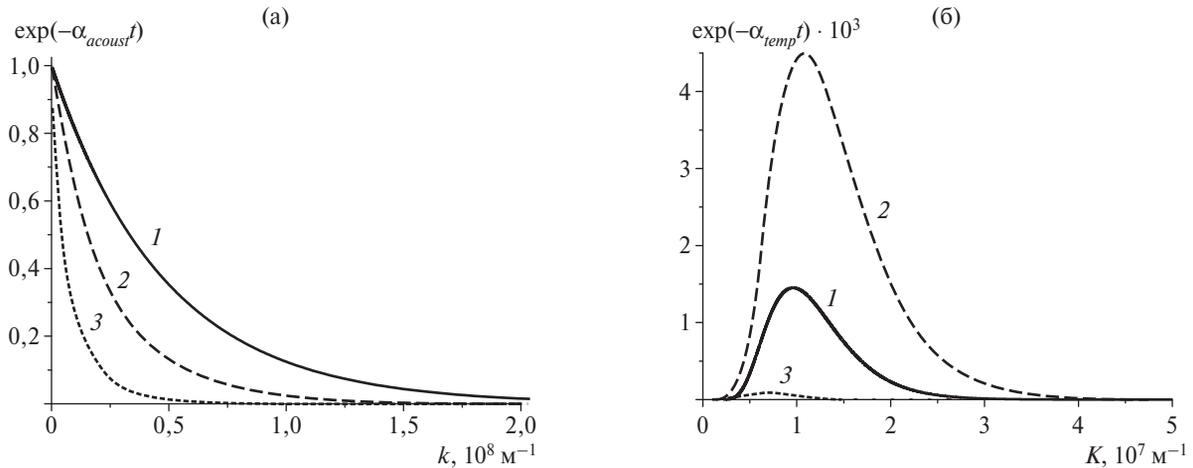
$$\omega_2 \approx kV - i \frac{V_T^2}{2\chi} \times$$

$$\times \left[ \frac{1 - V_T^2/c^2 + k^2 n \chi \tau_q (1 + V_T^2/c^2) + \delta(1 - V_T^2 k^2 n \tau_q)}{1 - V_T^2/c^2 + \delta(n+1)} \right].$$

Связность оказывает незначительное влияние на изменение пороговых и резонансных частот волнового процесса теплопереноса, не превышающее 2–3%. Более значительно влияние связности на затухание акустических и тепловых мод.

На рис. 3 представлены зависимости затухания акустических и тепловых мод для разных значений  $n$  и связности  $\delta$ .

Как видно, инерция градиента температуры очень существенно влияет на затухание как акустических, так и тепловых мод даже в отсутствие связанности. При этом оказывается, что существование волнового



**Рис. 3.** Влияние связности  $\delta$  и инерции градиента температуры  $\tau_T$  на затухание акустических мод (а): 1 —  $\tau_T = \tau_q, \delta = 0$ ; 2 —  $\tau_T = \tau_q, \delta = 0,01$ ; 3 —  $\tau_T = 2\tau_q, \delta = 0$  и тепловых мод (б): 1 —  $\tau_T = \tau_q, \delta = 0$ ; 2 —  $\tau_T = \tau_q, \delta = 0,1$ ; 3 —  $\tau_T = 2\tau_q, \delta = 0$ .

процесса теплопереноса возможно лишь в ограниченной полосе частот (длин волн) и практически исчезает при увеличении  $\tau_T$ . Например, увеличение  $\tau_T$  в два раза увеличивает затухание на порядок и сужает полосу частот существования волнового процесса.

Однако в отличие от случая применения однопараметрического уравнения теплопроводности здесь увеличение связности увеличивает затухание акустических мод (рис. 3а), но уменьшает затухание тепловых (рис. 3б), т.е. в отличие от модели с однопараметрическим уравнением теплопроводности здесь меняется направление энергообмена — энергия упругих волн за счёт связанности подпитывает волновой процесс теплопереноса.

Таким образом, соотношения релаксационных параметров, определяющих процесс теплопереноса, могут изменять направление энергообмена между упругими и тепловыми полями.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты показывают, что анализ дисперсионных соотношений позволяет прогнозировать поведение локально-неравновесных систем, в частности судить об области применимости той или иной модели теплопереноса в системе уравнений динамической термоупругости.

Показано, что применение волновых моделей теплопереноса правомерно для длительностей возмущений  $\tau_L \leq \tau_q \sim 10^{-10}$  с, т.е. для пикосекундного диапазона длительностях лазерного воздействия, а волновой процесс теплопереноса может существовать только на малых масштабах порядка единиц микрон и только для очень больших волновых векторов (малых длин волн).

Рост связности в случае волнового процесса теплопереноса и однопараметрического уравнения теплопроводности в отличие от классической модели значительно уменьшает затухание акустических волн за счёт энергообмена между тепловыми и упругими волнами.

В случае учёта инерционности градиента температуры в двухпараметрической модели теплопереноса связность меняет направление энергообмена — упругие волны подпитывают тепловые.

Отметим при этом, что увеличение инерционности градиента температуры практически уничтожает волновой процесс теплопереноса и возвращает к классической модели Фурье.

**Источник финансирования.** Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15–19–00182.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С.Л.* // УФН. 1997. Т. 167. № 10. С. 1096–1106.
2. *Cattaneo C.* // C.R. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 247. P. 431–433.
3. *Vernotte P.* // C.R. Acad. Sci. Paris. 1958. V. 246. P. 3154–3155.
4. *Tzou D.Y.* Macro- to Micro-Scale Heat Transfer: The Lagging Behavior. 2nd ed. West Sussex: Wiley, 2015. P. 1298.
5. *Kaganov M.I., Lifshitz M.V.* // Soviet Phys. JETP. 1957. V. 4. P. 173–178.
6. *Ordóñez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J.* // Int. J. Therm. Sci. 2009. V. 48. № 11. P. 2053–2062.
7. *Galović S., Kostoski D.* // J. Appl. Phys. 2003. V. 93. № 5. P. 3063–3070.
8. *Saha A., Basu S., Kumar R.* // J. Fluid Mech. 2012. V. 692. P. 207–219.

9. Даниловская В.И. // ПММ. 1952. Т. XVI. № 3. С. 342–344.
10. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. С. 307.
11. Zimin B.A., Sudenkov Y.V., Sventitskaya V.E. Dispersion Analysis of Two-Phase Generalized Model of Dynamic Thermoelasticity. In: IEEE Proceedings of Mechanics Seventh Polyakhov's Reading. Saint-Petersburg, 2–6 February, 2015. S.-Peterburg, 2015. P. 255–257.
12. Tzou D.Y. // J. Heat Transfer. 1994. V. 116. № 3. P. 526–53.

## ANALYSIS OF THE GENERALIZED HEAT EQUATION APPLIED TO THE SOLUTION OF THE DYNAMIC PROBLEM OF THERMOELASTICITY

**B. A. Zimin<sup>1</sup>, Yu. V. Sudenkov<sup>2,3</sup>**

<sup>1</sup> *Baltic State Technical University «Voenmeh» named after D.F. Ustinov, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>2</sup> *Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

<sup>3</sup> *Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Science,  
Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov November 29, 2018

Received December 10, 2018

Based on the approximate solution of the dispersion equation, the paper presents an analysis of the system of dynamic thermoelasticity equations taking into account the generalized heat equation. It is noted that during the wave process of heat transfer, a sufficiently intensive process of energy exchange between thermal and elastic fields is realized, while depending on the relations of the characteristic relaxation times, the direction of energy exchange can change.

*Keywords:* thermoelasticity, thermal conductivity, dispersion analysis, locally nonequilibrium systems, relaxation time.