

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ—ЭЙЛЕРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕПЛОВОГО ИСТОЧНИКА

Академик РАН Н. Ф. Морозов^{1,3}, член-корреспондент РАН Д. А. Индейцев^{1,2,3},
А. В. Лукин², И. А. Попов², О. В. Привалова^{2,*}, Б. Н. Семенов^{1,3,**}, Л. В. Штукин^{1,2}

Поступило 28.11.2018 г.

Решена задача об источнике нагрева, действующем на определённую часть поверхности балки и движущемся вдоль неё с заданной скоростью v . Показано, что наиболее существенную роль в формировании изгиба балки, нагруженной сжимающей силой, оказывают сосредоточенные моменты, возникающие на движущейся границе источника нагрева. Отмечено, что при скорости движения источника меньше некоторой критической прогиб балки носит существенно немонокотный характер. При этом наибольший прогиб балки имеет место при достижении скоростью движения источника значения, соответствующего критической силе Эйлера.

Ключевые слова: балка Бернулли—Эйлера, тепловой источник, динамическое поведение, метод переменного интервала.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855579-582>

ВВЕДЕНИЕ

Динамическое поведение элементов конструкций при импульсных тепловых воздействиях в настоящее время привлекает внимание многих исследователей [1–4]. Подобные задачи возникают в таких отраслях современной техники, как применение технологий для неразрушающего контроля и изучения физических свойств материалов на микро- и наномасштабном уровне, технологические процессы производства (лазерное испарение, формовка, сварка), исследование работоспособности нано- и микроэлектромеханических систем в условиях ударно-импульсных тепловых воздействий.

В работах [2–4] показано, что в общем случае напряженно-деформированное состояние, вызванное нагревом, определяется продольной сжимающей силой P_T и изгибающим моментом M_T :

$$P_T = Eb\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} \theta dz, \quad M_T = Eb\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} dz. \quad (1)$$

В работах [3, 4] рассмотрена задача об импульсном нагреве по всей поверхности балки, что позволяет учитывать только продольную сжимающую силу и не учитывать действие изгибающего момента.

На сегодняшний день совместное влияние осевой сжимающей силы и изгибающего момента не рассмотрено. В настоящей работе решается задача об источнике нагрева, действующем на определённую часть поверхности балки и движущемся вдоль неё с заданной скоростью v . Показано, что наиболее существенную роль в формировании изгиба балки, нагруженной сжимающей силой, оказывают сосредоточенные моменты, возникающие на движущейся границе источника нагрева. Отмечено, что при скорости движения источника меньше некоторой критической прогиб балки носит существенно немонокотный характер. При этом наибольший прогиб балки имеет место при достижении скоростью движения источника значения, соответствующего критической силе Эйлера $\sqrt{4kEJ}$ [7].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тепловой источник, движущийся вдоль балки от её середины со скоростью v , так что прогретым остаётся отрезок балки длиной $2l_0$ (рис. 1).

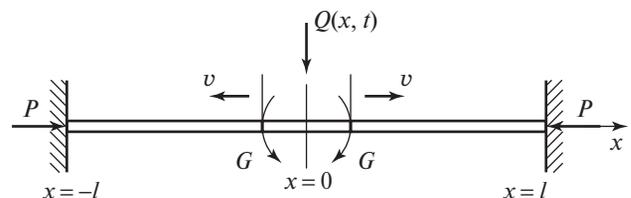


Рис. 1. Балка при действии движущегося источника нагрева.

¹ Институт проблем машиноведения
Российской Академии наук, Санкт-Петербург

² Санкт-Петербургский политехнический университет

³ Санкт-Петербургский государственный университет

*E-mail: o.privalova@mail.ru

**E-mail: semenov@bs1892.spb.edu

Многомасштабность во времени происходящих нестационарных процессов заставляет ограничиться аналитическим описанием формирования изгиба балки в течение времени существования движущегося источника. Именно в течение этого времени напряжённое состояние определяется сжимающей осевой нагрузкой (вызванной продольными волнами сжатия-растяжения), а также изгибающими моментами.

При прогреве небольшого участка балки внезапное тепловое расширение, возникшее на этом участке, приведёт к возбуждению продольной волны сжатия, убегающей со скоростью продольных волн к краям балки. За счёт отражения их от заделанных краёв возникнет режим продольных колебаний, имеющих некоторую среднюю составляющую. При этом колебательная составляющая может вызвать явление параметрического возбуждения [5]. Этот случай необходимо рассмотреть отдельно. Принимая, что в реальности влияние диссипативных сил исключит этот феномен, будем считать, что среднее значение продольного усилия в результате волнового процесса равно некоторой силе P , которая не превосходит силу Эйлера для балки на упругом основании [7].

Полагая, что отвода тепла от нагретого участка не происходит (или происходит достаточно медленно), можно считать, что наибольший градиент температуры будет вблизи движущейся границы нагретого и холодного участков. Последнее аналогично на основе (1) действию сосредоточенных изгибающих моментов, движущихся вдоль балки со скоростью движения источника нагрева.

Тогда окончательно исходная задача может быть сформулирована следующим образом. К заделанной по краям балке длиной $2l$ и поджатой некоторый силой P в некоторый момент времени внезапно прикладываются два сосредоточенных изгибающих момента G , разбегающихся от её середины к краям с заданной скоростью v .

Из-за симметрии задачи можно искать решение на участке $0 \leq x \leq l$. Уравнения, граничные и начальные условия принимают вид

$$\begin{aligned} L(w) = EJw'''' + Pw'' + \rho\ddot{w} + kw - F(x, t) = 0, \\ w'(0, t) = 0, \quad w'''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad w'(l, t) = 0, \quad (2) \\ w(x, 0) = 0, \quad \dot{w}(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

где $F(x, t) = G\delta'(x - l_0)$, $l_0 = vt$.

Прогиб w , удовлетворяющий уравнению (1), в соответствии с [6] будем отыскивать на переменном интервале $l_w(t)$, $0 < x \leq l_w < l$, в виде

$$w(x, t) = \beta(t)w_1(x), \quad (3)$$

выбрав в качестве формы функцию, удовлетворяющую граничным условиям закрепления:

$$w_1(x) = \left(1 + \cos \frac{\pi x}{l_w}\right) H(l_w - x),$$

где $H(x)$ — функция Хэвисайда.

Выполняя процедуру Галеркина, получим дифференциальное уравнение относительно амплитуды прогиба $\beta(t)$

$$\ddot{\beta} + \Omega^2 \beta = f(t), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{3} \frac{EJ}{l_w^4} + k - \frac{P}{l_w^2} \right), \quad f(t) = D \frac{1}{l_w^2} \sin \frac{\pi r}{l_w}, \\ r(t) = \frac{vt}{l}, \quad D = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\rho} G. \end{aligned}$$

Используя известные приёмы метода переменного интервала [6], получим решение уравнения (4):

$$\beta(t) = \frac{1}{\Omega} \int_0^t f(\xi) \sin \Omega(t - \xi) d\xi. \quad (5)$$

Длину переменного интервала, согласно [6], можно найти из условия

$$\frac{\partial}{\partial s} (l_w \beta^2) = 0. \quad (6)$$

Выражение (5) для амплитуды прогиба $\beta(t)$ в случае малого изменения во времени функции $f(t)$, исходя из теоремы о среднем, можно упростить:

$$\beta(t) = D \frac{1}{l_w^2} \sin \frac{\pi vt}{l} \frac{1}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t). \quad (7)$$

Подстановка (7) в условие (6) даёт уравнение, из которого может быть найдена зависимость длины переменного интервала l_w от времени. Для удобства проведения вычислений введены безразмерные величины $s(t) = \frac{l_w(t)}{l}$ — безразмерная длина переменного интервала, $\tau = \lambda t$ — безразмерное время,

$v = \frac{\pi v}{\lambda}$ — безразмерная скорость, $\lambda = \sqrt{\frac{EJ}{3\rho} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4}$.

На рис. 2 показаны результаты нахождения длины интервала $s(t)$ из условия (6) (кривая 1) и путь, пройденный при этом движущейся нагрузкой (кривая 2).

Из рис. 2 видно, что на малых временах изменение длины интервала (кривая 1) пропорционально величине \sqrt{t} и в основном определяется параметрами балки. Скорость изменения длины интервала с течением времени падает. Из рис. 2 также видно, что

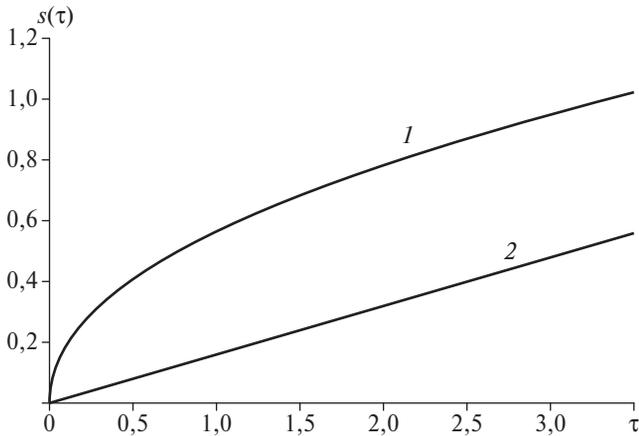


Рис. 2. Зависимость длины переменного интервала от времени. 1 — длина интервала $s(\tau)$, 2 — $v\tau$ — путь, пройденный нагрузкой.

начиная с некоторого момента времени уменьшение скорости изменения длины интервала прекращается, эта скорость становится близкой к скорости движения нагрузки v (кривая 1 становится почти параллельной кривой 2).

На рис. 3 показано изменение во времени прогиба в центре балки при различных скоростях движения нагрузки.

Из рис. 3 видно, что при малых скоростях нагрузки прогиб нарастает во времени (кривая 1). Однако при увеличении скорости нагрузки выше некоторого критического значения происходит замедление нарастания прогиба во времени, более того, большей скорости соответствует меньшее значение прогиба (кривые 2 и 3). Последнее объясняется тем, что величина прогиба пропорциональна работе внешнего момента на угле поворота формы прогиба в точке его приложения. Пока точка приложения находится в той части переменного интервала, где

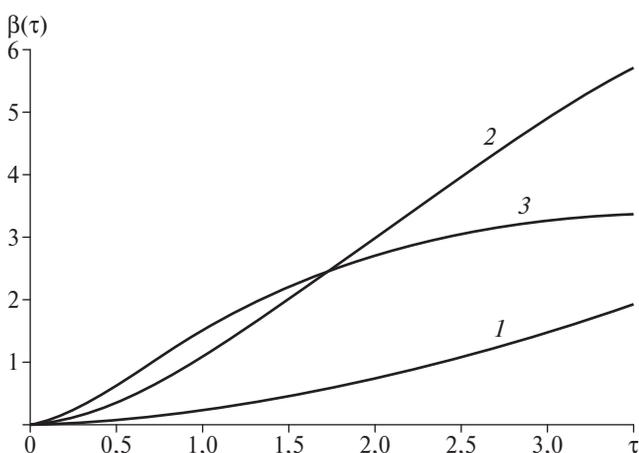


Рис. 3. Изменение амплитуды прогиба в центре балки от времени при различных скоростях нагрузки: $v = 0,1$ (1); $0,5$ (2); $-0,9$ (3).

угол поворота растёт, увеличивается работа момента, соответственно растёт и прогиб. Это происходит при скорости меньше фазовой скорости изгиба балки. В противоположном случае точка приложения момента оказывается в той части интервала, где угол поворота сечения становится меньше, что и уменьшает в конечном счёте величину прогиба.

Определим критические значения скорости v и максимальной амплитуды прогиба. Точное решение уравнения (4) имеет вид

$$\beta(t) = \frac{D}{\Omega(l_w)l_w^2} \times \frac{\Omega(l_w)\sin(\omega(l_w)t) - \omega(l_w)\sin(\Omega(l_w)t)}{\Omega^2(l_w) - \omega^2(l_w)}, \quad (8)$$

где $\omega(l_w) = \frac{\pi v}{l_w}$.

Обозначив волновое число $\alpha(l_w) = \frac{\pi}{l_w}$, знаменатель в (8) можно привести к виду

$$\Delta(\alpha) = EJ\alpha^4 - P^*\alpha^2 + k, \quad (9)$$

где $P^* = P + \rho v^2$, что в точности совпадает с известным дисперсионным выражением для балки Бернулли—Эйлера на упругом основании [7]. Обращение в нуль последнего выражения (9) происходит при $P^* = P_{\text{Э}} = \sqrt{4EJk}$, откуда может быть найдена критическая скорость движения нагрузки

$$v_{\text{кр}}^2 = \sqrt{4EJk} - P. \quad (10)$$

В этом случае, раскрывая неопределённость в (8), критическое значение длины интервала запишем в виде

$$l_{\text{кр}}^2(t) = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{k}}, \quad (11)$$

и, в свою очередь, зная зависимость длины интервала от времени, можно найти время $t_{\text{кр}}$, при котором амплитуда прогиба достигает своего максимального значения:

$$\beta_{\text{max}}(t_{\text{кр}}) = D \frac{\Omega(t_{\text{кр}})t_{\text{кр}} \cos(\Omega(t_{\text{кр}})t_{\text{кр}}) - \sin(\Omega(t_{\text{кр}})t_{\text{кр}})}{\Omega^2(t_{\text{кр}})l_{\text{кр}}^2}. \quad (12)$$

Последующее увеличение длины интервала (его рост во времени t), если это позволяют граничные условия, приводит к уменьшению прогиба, как это и было показано ранее.

Дальнейшее уточнение решения задачи следует проводить с учётом обоснованного определения

осевой силы P . Последнее, безусловно, требует анализа волнового процесса при продольном возмущении [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача о движущемся источнике нагрева сведена к задаче о движении сосредоточенного изгибающего момента. Изучен этап распространения волны изгиба под действием движущегося сосредоточенного изгибающего момента.

При малых значениях скорости и малых временах изменение длины переменного интервала почти пропорционально величине \sqrt{t} .

Когда скорость изменения длины интервала становится близкой к скорости движения нагрузки, скорость изменения длины интервала стабилизируется.

Большой скорости нагрузки соответствует большее значение максимального прогиба только до определённой скорости. При ещё больших скоростях прогиб становится меньше для больших значений скорости нагрузки.

Потери устойчивости равновесия, обусловленной наличием сжимающей продольной силы, за время пробега волны изгиба до края балки не происходит.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 15-19-00182).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sun Y., Liu S., Rao Z., Li Y., Yang Y. // *Symmetry*. 2018. V. 10. № 8. P. 328–341.
2. Fang D., Soh A.K. // *Int. J. Solids and Struct.* 2008. V. 45. P. 1993–2013.
3. Sun Y., Ma J., Yang X., Liu S., Yang J. // *Canad. J. Phys.* 2017. V. 95. № 10. P. 1012–1022.
4. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. // *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. Техн. науки*. 2018. № 2 (198). С. 35–44.
5. Морозов Н.Ф., Индейцев Д.А., Лукин А.В., Попов И.А., Привалова О.В., Штукин Л.В. // *ДАН*. 2018. Т. 481. № 6. С. 619–624.
6. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. // *ДАН*. 2013. Т. 453. № 3. С. 282–285
7. Слепян Л.И. *Нестационарные упругие волны*. Л.: Судостроение, 1972. 376 с.
8. *Нелинейные волны* / Под ред. С. Лейбовица, А. Сибаса. М.: Мир, 1977. 319 с.

BERNOULLI—EULER BEAM UNDER ACTION OF A MOVING THERMAL SOURCE: CHARACTERISTICS OF THE DYNAMIC BEHAVIOR

Academician of the RAS N. F. Morozov^{1,3}, Corresponding Member of the RAS D. A. Indeitsev^{1,2,3}, A. V. Lukin², I. A. Popov², O. V. Privalova², B. N. Semenov^{1,3}, L. V. Shtukin²

¹*Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation*

²*Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

³*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Received November 28, 2018

The problem of a heating source acting on a certain part of a beam surface and moving along it with given speed is solved. It is shown that the most significant role in formation of the beam deflection under loading by a compression force is played by concentrated moments occurring at the moving boundary of the heating source. It is noted that for a source speed less than some critical value, the beam deflection is essentially nonmonotonic. In this case, the largest beam bending deflection occurs when the source speed reaches a value corresponding to the Euler critical force.

Keywords: Bernoulli—Euler beam, heating source, dynamic behavior, variable interval method.