

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ПЯТОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.12.2018 г.

Поступило 13.12.2018 г.

Показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, диссипация, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524855583-587>

ВВЕДЕНИЕ

Дать общее определение динамической системы с имеющейся диссипацией довольно затруднительно. В каждом конкретном случае иногда это может быть сделано: вносимые в систему определённые коэффициенты в уравнениях указывают в одних областях фазового пространства на рассеяние энергии, а в других областях — на её подкачку. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Однако как только в системе обнаруживаются притягивающие или отталкивающие предельные множества, необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всём фазовом пространстве первых интегралов [1].

В некоторых случаях для систем с диссипацией, если и удаётся найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Полученные в работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил.

Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [2, 3]). В данной работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем пятого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к двумерным многообразиям. При этом силовые поля обладают дис-

сипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

ЗАМЕЧАНИЯ К СИСТЕМАМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Пусть v, α, z — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы (для простоты, степени 2) по переменным v, z (см. также [4]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt, \frac{d}{dq} = \langle' \rangle$), будем рассматривать систему третьего порядка

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z)v, & \alpha' &= -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' &= -Z\Psi(\alpha, Z), & \Psi(\alpha, Z) &= -bZ^2\delta'(\alpha), \end{aligned} \quad (1)$$

$z = Zv, b \geq 0, \delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение на v отделяется, что даёт возможность рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ [5].

Система (1) имеет два гладких первых интеграла:

$$\begin{aligned} \Phi_0(v; Z; \alpha) &= v^2(1 - 2bZ\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \\ \Phi_1(v; Z) &= vZ = C_1 = \text{const}. \end{aligned}$$

Другими словами, независимая подсистема на $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл вида (см. также [4, 6])

$$\Phi(Z; \alpha) = \frac{1 - 2bZ\delta(\alpha)}{Z^2} = C = \text{const}.$$

Добавляя в систему (1) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: shamolin@rambler.ru

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v, \quad \alpha' = -Z + bZ^2\delta(\alpha),$$

$$Z' = F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z),$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b = 0$ [2]). Действительно, при некотором условии у неё существует гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z; \alpha) = v^2(Z^2 + F_1(\alpha)) = C_1 = \text{const},$$

$$F_1(\alpha) = 2F(\alpha),$$

структура которого напоминает интеграл полной энергии, но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\delta'(\alpha)$, дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означающие наличие в системе притягивающих предельных множеств) [7].

СИСТЕМЫ ПЯТОГО ПОРЯДКА ПРИ ОТСУТСТВИИ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Пусть $v, \alpha, \beta, z_1, z_2$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z_1, z_2 (см. также [8]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную $q \left(dq = vdt, \frac{d}{dq} = \langle ' \rangle \right)$, будем рассматривать систему пятого порядка

$$v' = \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \tag{2}$$

$$\Psi(\alpha, Z_1, Z_2) = -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha),$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha),$$

$$Z_2' = \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{3}$$

$$Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2),$$

$$\beta' = Z_1 f(\alpha),$$

$z_k = Z_k v, k = 1, 2, b \geq 0, \delta(\alpha), f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как систему при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2) отделяется, что даёт возможность рассматривать уравнения (3) в качестве независимой системы (с двумя степенями свободы) на четырёхмерном многообразии $M^4\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\} = TM^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ (касательном расслоении гладкого двумерного многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$, см. также [2, 8]).

Рассмотрим структуру системы (3). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении

$TM^2\{\alpha^*, \beta^*; \alpha, \beta\}$ многообразия $M^2\{\alpha, \beta\}$ [9] (в частности, сферы или поверхностей вращения с двумя или тремя ненулевыми коэффициентами связности):

$$\alpha'' + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)\beta'^2 = 0,$$

$$\beta'' + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)\alpha'\beta' = 0. \tag{4}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2 в касательном пространстве в виде

$$\alpha' = -Z_2, \quad \beta' = Z_1 f(\alpha), \tag{5}$$

мы получаем соотношения на них в виде (ср. с системой (3))

$$Z_1' = \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2,$$

$$Z_2' = \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2, \tag{6}$$

при этом уравнения (4) почти всюду эквивалентны совокупности (5), (6), которая прежде всего присутствует в системе (3).

Далее в системе (3) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$, но, как и в системе (1), они не нарушают консервативности, поскольку система (2), (3) обладает полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

Предложение 1. *Если всюду справедливо равенство*

$$\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha) + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \equiv 0, \tag{7}$$

то система (2), (3) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Предложение 2. *Если функция $\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta)$ является функцией лишь α :*

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha), \tag{9}$$

то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_2(v; Z_1; \alpha) = v^2 Z_1 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \tag{10}$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ должна удовлетворять равенству

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\beta(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const}. \tag{11}$$

Если выполнено свойство (9) и функция $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)$ также является функцией лишь α : $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha)$, то в системе (3) выделяется независимая подсистема

третьего порядка, состоящая из первых трёх уравнений (уравнение на β' отделяется). В частности, если выполнены свойства (7), (9), то такая независимая подсистема выделяется.

Предложение 3. Пусть функция $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)$ является функцией лишь α : $\Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha)$. Тогда система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \quad (12)$$

если функция $\delta(\alpha)$ удовлетворяет равенству

$$\delta(\alpha) = A_2 \exp\left\{-\int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(b)db\right\}, \quad A_2 = \text{const}.$$

В частности, если выполнены свойства (7), (9), (11), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида (12).

Предложение 4. Если выполнены условия (7), (9), (11), то система (2), (3) имеет первый интеграл вида

$$\begin{aligned} \Phi_3(\alpha, \beta) &= \beta + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{C_2^2 f(b)}{A_3 + bC_1^2 \delta^2(b)} db = \\ &= C_3 = \text{const}, \end{aligned} \quad (13)$$

где после взятия интеграла (13) вместо постоянных C_1^2, C_2 можно подставить левые части равенств (8), (10) соответственно ($A_3 = \text{const}$).

Теорема 1. Если выполнены условия (7), (9), (11), то система (2), (3) обладает полным набором (четырьмя) гладких независимых первых интегралов вида (8), (10), (12), (13).

ВВЕДЕНИЕ ВНЕШНЕГО СИЛОВОГО ПОЛЯ

Модифицируем систему (2), (3) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, введя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ в уравнение на Z_2' системы (14), (15) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расщепления $T * M^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta\}$ примет вид

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \\ \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta'(\alpha) + b_1F(\alpha)\delta(\alpha), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\alpha' = -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha),$$

$$\tilde{f}(\alpha) = \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{\delta'(\alpha)},$$

$$\begin{aligned} Z_2' &= F(\alpha) + \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - \\ &- Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]Z_1Z_2 - \\ &- Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' &= Z_1f(\alpha), \end{aligned}$$

$\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Силовое поле в уравнениях на v', Z_1', Z_2' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z_1, Z_2)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α' . Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра $b, b_1 \geq 0, \mu$) будут иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\delta'(\alpha) & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$ и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого; см. также [2, 3, 8]).

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ДИССИПАЦИЕЙ

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы пятого порядка (14), (15) при выполнении свойств (7), (9). Она также допускает отделение независимой подсистемы третьего порядка.

Теорема 2. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha)f^2(\alpha) &= \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln|\delta(\alpha)|, \\ F(\alpha) &= \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда система (14), (15) при выполнении свойств (7), (9) обладает четырьмя независимыми (вообще говоря, трансцендентными [10] в смысле комплексного анализа) первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов таков:

$$\Theta_1(Z_2, Z_1; \alpha) = G_1\left(\frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{Z_2^2 + Z_1^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_1\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const.} \quad (17)$$

При помощи интеграла (17) получаются и другие первые интегралы. При этом они имеют следующие структурные виды:

$$\Theta_2(Z_2, Z_1; \alpha) = G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_2 = \text{const.}, \quad (18)$$

$$\Theta_3(Z_2, Z_1; \alpha, \beta) = G_3\left(\delta(\alpha), \beta, \frac{Z_2}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_1}{\delta(\alpha)}\right) = C_3 = \text{const.} \quad (19)$$

Выражение первых интегралов (18), (19) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ второй из интегралов системы (14), (15) найдётся из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_2} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_2)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_2) + u_2^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2 - U^2(C_1, u_2)},$$

$$U(C_1, u_2) = \frac{\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_2 + u_2^2)}\right\}}{2},$$

$$u_2 = Z_2/\delta(\alpha).$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1^2 можно подставить левую часть равенства (17).

Кроме того, у системы (14), (15) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (12)), который, например, при $b = b_1$, $\mu = 1$ примет вид

$$\Phi_0(v; Z_2; \alpha) = v^2(1 - 2bZ_2\delta(\alpha) + b^2(Z_1^2 + Z_2^2)) = C_0 = \text{const.}$$

Справедлива и теорема, обратная теореме 2.

Теорема 3. *Условия (7), (9), (16) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования первого интеграла (17) для системы (14), (15).*

СТРОЕНИЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ

Если α — периодическая координата периода 2π , то система (14), (15) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается

в систему консервативную (2), (3). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (8), (10). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (14), (15) при втором условии из (16) обладает первым интегралом вида

$$\Xi_0(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const.} \quad (20)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (20), (10) также является первым интегралом системы (14), (15) при не равенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Xi_{b_1}(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 - b_1\lambda\mu Z_2\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \quad (21)$$

и (10) по отдельности не является первым интегралом системы (14), (15). Однако отношение функций (21), (10) является первым интегралом (17) системы (14), (15) (при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств [1–3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на двумерной сфере, и $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin\alpha. \quad (22)$$

Случай (22) формирует класс систем (14), (15) при $\mu = 1$, соответствующих пространственному движению динамически симметричного твёрдого тела на нулевом уровне циклического интеграла в неконсервативном поле сил [8, 9]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на двумерной сфере. В случае (22), если $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos\alpha$, то система описывает пространственное движение твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [8]. В частности, если $F(\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$, $\delta(\alpha) = \sin\alpha$, то система эквивалентна пространственному (сферическому) маятнику, помещённому в поток набегающей среды, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является “собственно” диссипативной). Тем не менее и в этом случае (благодаря теореме 2) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражаемых через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении двумерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 475. № 5. С. 519–523.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
7. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. математика. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и её приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНТИ, 2013. Т. 125. С. 5–254.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трёхмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABLE FIFTH-ORDER SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov December 12, 2018

Received December 13, 2018

Integrability is shown for some classes of fifth-order dynamic systems homogeneous in variables, in which a system on the tangent bundle of two-dimensional manifolds is separated. Here, the force fields possess the dissipation of alternating signs and generalize the fields considered earlier.

Keywords: dynamical system, dissipation, integrability, transcendental first integral.