ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 6, с. 655–658

МАТЕМАТИКА

УДК 519.615

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРЕМЕ ФАРКАША ОБ АЛЬТЕРНАТИВЕ

Академик РАН Ю. Г. Евтушенко[1,2,*], А. А. Третьяков[1,3,4,**],
академик РАН Е. Е. Тыртышников[2,4,5,***]

Поступило 14.11.2018 г.

Рассматривается классическая теорема Фаркаша об альтернативе, которая находит широкое применение в различных разделах математики и имеет множество разнообразных доказательств и формулировок. Предложено совершенно новое элементарное доказательство этой теоремы, основанное на рассмотрении функционала, который при условии Фаркаша ограничен снизу на всём пространстве и достигает минимума. Утверждение теоремы Фаркаша о принадлежности вектора конусу равносильно тому, что градиент этого функционала равен нулю в точке минимума.

Ключевые слова: теорема Фаркаша об альтернативе, условие Фаркаша, теорема Вейля, метод Фурье–Моцкина.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524856655-658

Одним из ключевых утверждений в теории линейных неравенств и вообще в теории оптимизации является, бесспорно, теорема Фаркаша.

Теорема 1 (Фаркаша). *Пусть $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}^n$ и выполнено следующее условие Фаркаша: для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего системе линейных неравенств $(a_1, x) \le 0, \dots, (a_m, x) \le 0$, имеет место также неравенство $(b, x) \le 0$.*

Тогда существуют неотрицательные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ такие, что $b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$.

Напомним, что множество $K = \mathrm{con}(a_1, \dots, a_m)$ всевозможных линейных комбинаций векторов $a_1, \dots, a_m$ с неотрицательными коэффициентами называется конечнопорождённым конусом. Таким образом, теорема говорит о том, что если выполнено условие Фаркаша, то $b \in K$. Это же утверждение часто формулируется в виде следующей альтернативы.

Теорема 2 (об альтернативе). *Пусть $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}^n$. Тогда либо $b \in \mathrm{con}(a_1, \dots, a_m)$, либо существует решение системы неравенств*

$$(a_1, x) \le 0, \dots, (a_m, x) \le 0), \ (b, x) > 0.$$

При относительно простой формулировке теоремы Фаркаша любое из известных её доказательств вряд ли можно считать очень простым (см., например, [1–12]). По-видимому, концептуально самым простым является доказательство Бартла [4], в котором реализуется индукция по m и не используются какие-либо нетривиальные утверждения, требующие отдельного доказательства. Наша цель — представить, возможно, ещё более простое и, как нам кажется, совершенно новое доказательство теоремы Фаркаша.

ЗАМЕЧАНИЯ О СУЩЕСТВУЮЩИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАХ

Короткое доказательство, обычно излагаемое в учебниках, использует теорему о существовании гиперплоскости, строго разделяющей точку и замкнутое выпуклое множество, и опирается на не очень простое утверждение о замкнутости конечнопорождённого конуса.

Заметим, впрочем, что последнее утверждение можно легко получить как следствие некоторых других не очень простых утверждений. Например, замкнутость конуса $K = \mathrm{con}(a_1, \dots, a_m)$ сразу вытекает из следующего двойственного описания конечнопорождённого конуса.

Теорема 3 (Вейля). *Конечнопорождённый конус является пересечением конечного числа замк-*

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской Академии наук, Москва*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[3] *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*
[4] *Siedlce University, Poland*
[5] *Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской Академии наук, Москва*
**E-mail*: *evt@ccas.ru*
***E-mail*: *tret@ap.siedlce.pl*
****E-mail*: *eugene.tyrtyshnikov@gmail.com*

нутых полупространств с проходящей через нуль граничной гиперплоскостью.

Заметим также, что, имея теорему Вейля, мы сразу получаем тривиальное доказательство теоремы Фаркаша. В самом деле, согласно теореме Вейля, конус $K = \operatorname{con}(a_1, \ldots, a_m)$ состоит из векторов x, удовлетворяющих некоторой системе неравенств вида

$$(b_1, x) \le 0, \ldots, (b_s, x) \le 0.$$

Если $b \notin K$, то для какого-то индекса j получаем $(b_j, b) > 0$. При этом $a_1, \ldots, a_m \in K \Rightarrow (a_1, b_j) \le 0, \ldots$ $\ldots, (a_m, b_j) \le 0$. В силу условия Фаркаша $(b, b_j) \le 0$, т.е. возникает противоречие.

Такой путь к теореме Фаркаша, конечно, нельзя принять, когда сама теорема Вейля доказывается через теорему Фаркаша (например, в [1, 3]). Однако независимое доказательство тоже имеется. В нём вводится матрица $A = [a_1, \ldots, a_m]$ и рассматривается полиэдр (пересечение конечного числа замкнутых полупространств) вида

$$P = \{(x, y) \colon y = Ax, x \ge 0\},$$

из которого конус K получается при помощи последовательного исключения координат вектора y по методу Фурье—Моцкина (см., например, [12]).

Заметим ещё, что утверждение о замкнутости конуса K легко выводится из теоремы Фаркаша. В самом деле, если вектор b есть предел последовательности векторов из K, то для векторов $a_1, \ldots, a_m, b$ выполнено условие Фаркаша и по теореме Фаркаша $b \in K$.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФАРКАША

Введём в рассмотрение следующий функционал:

$$\Phi(x) = (b, x) + \sum_{i=1}^{m} (a_i, x)_-^2,$$

$$f_- = \begin{cases} f, & f < 0, \\ 0, & f \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что среди векторов x с одним и тем же значением функционала $\Phi(x)$ имеется вектор наименьшей длины. Такой вектор будем называть минимальным.

Теорема 4. *Если векторы $a_1, \ldots, a_m, b \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют условию Фаркаша, то функционал $\Phi(x)$ ограничен снизу и в некоторой точке достигает своего минимального значения.*

Доказательство. Предположим, что выполнено условие Фаркаша, и рассмотрим произвольную последовательность минимальных векторов x_k, для которых $\Phi(x_k) < 0$. Очевидно, $(b, x_k) < 0$. Если бы неравенства $(a_1, x_k) \ge 0, \ldots, (a_m, x_k) \ge 0$ выполнялись одновременно, то согласно условию Фаркаша было бы верным противоположное неравенство $(b, x_k) \ge 0$. Таким образом, в силу условия Фаркаша множество индексов $I_k = \{i \colon (a_i, x_k) < 0\}$ непусто.

Далее, $\Phi(x_k) = (b, x_k) + q(x_k)$, где $q(x_k) = \sum_{i \in I_k} (a_i, x_k)^2 > 0$. Последовательность векторов $h_k = \dfrac{x_k}{\|x_k\|}$ принадлежит единичной сфере в конечномерном пространстве и поэтому обладает сходящейся подпоследовательностью. Не ограничивая общности, можно считать, что $h_k \to h$. Поскольку имеется конечное число индексных множеств, можно также полагать, что множество $I_k = I$ одно и то же при всех k. При $\{x = th_k, t \ge 0\}$ функционал имеет вид $\Phi(th_k) = (b, h_k)t + q(h_k)t^2$, а его минимальное значение достигается при $t_k = -\dfrac{(b, h_k)}{2q(h_k)}$ и равно $\gamma_k = -\dfrac{(b, h_k)^2}{4q(h_k)}$.

Пусть $\Phi(x_k) \to \gamma = \inf_x \Phi(x)$. Пока что допускается, что $\gamma = -\infty$. В любом случае очевидно, что $\gamma_k \to \gamma$. Предположим, что $t_k \to \infty$. Тогда $q(h) = \lim_{k \to \infty} q(h_k) = 0$. Значит, вектор h удовлетворяет системе неравенств $(a_i, h) \ge 0, \ldots, (a_m, h) \ge 0$ и по условию Фаркаша $(b, h) \ge 0$. В то же время $(b, h_k) \to$ $\to (b, h) \le 0$. Значит, $(b, h) = 0$. Можно заметить, что $\Phi(th) = 0$ при всех $t \ge 0$, но подчеркнём, что для дальнейших рассуждений важна прежде всего ортогональность вектора h векторам b и a_i при $i \in I$. Рассмотрим разложение вида

$$x_k = \alpha_k h + y_k, \quad \text{где } \alpha_k \ge 0, \ \|\alpha_k h\| = \|y_k\|.$$

Используя ортогональность, находим

$$\Phi(x_k) = (b, \alpha_k h + y_k) + \sum_{i \in I} (a_i, \alpha_k h + y_k)^2 = \\ = (b, y_k) + \sum_{i \in I} (a_i, y_k)^2.$$

Если $i \notin I$, но $(a_i, h) = 0$, то $(a_i, y_k) = (a_i, x_k) \ge 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_i, y_k)_- = 0$. Следовательно,

$$\Phi(y_k) = \Phi(x_k) + S_k,$$

где $S_k = \sum_{j \in J} (a_j, y_k)_-^2$, $J = \{j \colon (a_j, h) > 0\}$.

Наша цель — доказать, что $S_k = 0$ при достаточно больших k. Действительно, при $j \in J$ векторы a_j образуют острый угол с вектором h. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ угол между каждым вектором a_j и любым вектором, образующим с h угол не больше ε, останется, очевидно, острым. Мы полагаем, что $t_k \to \infty$, и в этом случае условие $\|\alpha_k h\| = \|y_k\|$ означает, что при достаточно больших k угол между векторами y_k и h окажется меньше ε. Поэтому $(a_j, y_k) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a_j, y_k)_- = 0 \Rightarrow S_k = 0$. Кроме того, при достаточно больших k векторы $\alpha_k h$ и y_k будут соответствовать боковым сторонам равнобедренного треугольника с тупым углом. В таком треугольнике длина основания больше длины боковой стороны. Значит, $\|y_k\| < \|x_k\|$ и при этом $\Phi(y_k) = \Phi(x_k)$, т.е. возникает противоречие с минимальностью векторов x_k. Значит, $q(h) > 0$, а отсюда следует, что последовательность t_k имеет конечный предел и $\Phi(t_k h_k) \to \Phi(x) = \gamma$ при $x = \lim\limits_{k\to\infty} t_k h_k$.

Доказательство теоремы Фаркаша. По теореме 4 функционал $\Phi(x)$ принимает минимальное значение в некоторой точке $x = x_0$. В этой точке его градиент равен нулю:

$$\operatorname{grad}\Phi(x_0) = b - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = 0_n, \alpha_i = -2(a_i, x_0)_- \geq 0.$$

Значит, $b \in \operatorname{con}(a_1, \ldots, a_m)$.

Замечание 1. По существу, мы доказали, что условие Фаркаша равносильно утверждению о том, что функционал $\Phi(x)$ ограничен снизу и достигает своего минимального значения. Кроме того, минимизируя данный функционал, можно найти неотрицательные коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ в разложении вектора b по векторам $a_1, \ldots, a_m$.

Замечание 2. Аналог теоремы 4 можно сформулировать также для функционала

$$\Psi(x) = (b, x) - \sum_{i=1}^{m} (a_i, x)_+^2,$$

$$f_+ = \begin{cases} f, & \text{если } f > 0, \\ 0, & \text{если } f \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\Psi(x) = -\Phi(-x)$. Поэтому условие Фаркаша равносильно существованию конечного максимального значения для $\Psi(x)$.

Источник финансирования. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 17–07–00510).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артамонов В.А.*, *Латышев В.Н.* Линейная алгебра и выпуклая геометрия. М.: Факториал Пресс, 2004.
2. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
3. *Тыртышников Е.Е.* Основы алгебры. М.: Физматлит, 2017.
4. *Bartl D.* A Short Algebraic Proof of the Farkas Lemma // SIAM J. Optim. 2008. V. 19. № 1. P. 234–239.
5. *Broyden C.G.* A Simple Algebraic Proof of Farkas's Lemma and Related Theorems // Optim. Methods and Software. 1998. V. 8. № 3/4. P. 185–199.
6. *Chandru V.*, *Lassez J.L.* Qualitative Theorem Proving in Linear Constraints. In: Verification: Theory and Practice. B., Heidelberg: Springer, 2003. P. 395–406.
7. *Dax A.* Classroom Note: An Elementary Proof of Farkas' Lemma // SIAM Rev. 1997. V. 39. № 3. P. 503–507.
8. *Голиков А.И.*, *Евтушенко Ю.Г.* Теоремы об альтернативах и их применение в численных методах // ЖВМиМФ. 2003. Т. 43. № 3. С. 354–375.
9. *Jaćimović M.* Farkas' Lemma of Alternative // The Teaching Math. 2011. V. 25. № 27. P. 77–86.
10. *Marjanović M.M.* An Iterative Method for Solving Polynomial Equations. In: Topology and Its Appl. Budva, 1972. P. 170–172.
11. *Roos C.*, *Terlaky T.S.* Note on a Paper of Broyden // Operations Res. Lett. 1999. V. 25. № 4. P. 183–186.
12. *Ziegler G.M.* Lectures on Polytopes. B.: Springer-Verlag, 1995.

A NEW APPROACH TO THE FARKAS THEOREM OF THE ALTERNATIVE

Academician of the RAS Yu. G. Evtushenko[1,2], A. A. Tret'yakov[1,3,4],
Academician of the RAS E. E. Tyrtyshnikov[2,4,5]

[1] *Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[3] *System Research Institute, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*
[4] *Siedlce University, Poland*
[5] *Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received November 14, 2018

The classical Farkas theorem of the alternative is considered, which is widely used in various areas of mathematics and has numerous proofs and formulations. An entirely new elementary proof of this theorem is proposed. It is based on the consideration of a functional that, under Farkas' condition, is bounded below on the whole space and attains a minimum. The assertion of Farkas' theorem that a vector belongs to a cone is equivalent to the fact that the gradient of this functional is zero at the minimizer.

Keywords: Farkas' theorem of the alternative, Farkas condition, Weyl's theorem, Fourier—Motzkin elimination method.