ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 6, с. 659–661

МАТЕМАТИКА

УДК 519.61

О МЕТОДЕ БИСЕКЦИИ ДЛЯ НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Х. Д. Икрамов

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым 13.12.2018 г.

Поступило 14.12.2018 г.

Для нормальных матриц общего вида предлагается техника локализации собственных значений, которую можно рассматривать как аналог хорошо известного метода бисекции для эрмитовых матриц.

Ключевые слова: бисекция, нормальная матрица, эрмитова матрица, индексы инерции.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524856659-661

1. Метод бисекции был популярным способом вычисления собственных значений вещественных симметричных и комплексных эрмитовых матриц в 1950–1960-х годах. Анализ этого метода можно найти даже в важной книге [1], изданной в 1977 г. Напомним вкратце суть метода.

Исходная матрица A преобразуется в вещественную трёхдиагональную матрицу T посредством ортогонального или унитарного подобия. Этот этап не является ещё собственно бисекцией; без изменения он вошёл в симметричный QR-алгоритм, вытеснивший бисекцию из численной практики.

Бисекция основана на следующем наблюдении: вычисление последовательности ведущих главных миноров матрицы $T - \mu I$, которое для матрицы T порядка n обходится всего лишь в $O(n)$ операций, даёт информацию о числе собственных значений T, лежащих правее и левее точки μ. Выбирая подходящим образом точки μ_i, можно локализовать каждое собственное значение с требуемой точностью или после грубой локализации подключить какой-либо быстро сходящийся метод.

Бисекция существенным образом использует вещественность собственных значений эрмитовой матрицы. Для нормальной матрицы A общего вида собственные значения могут быть произвольными комплексными числами. Цель настоящего сообщения — указать приём, который можно рассматривать как аналог бисекции для задачи локализации собственных значений нормальных неэрмитовых матриц. Этот приём описан в п. 3–6. Необходимые предварительные сведения изложены в п. 2.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *ikramov@cs.msu.su*

2. Напомним, что теплицевым (или эрмитовым) разложением квадратной комплексной матрицы A называется её представление в виде

$$A = B + iC, \quad B = B^*, C = C^*. \tag{1}$$

Эрмитовы матрицы B и C в этом разложении однозначно определены:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Теплицево разложение нормальной матрицы A характеризуется следующим свойством.

П р е д л о ж е н и е 1. *Квадратная матрица A нормальна, если и только если матрицы B и C в её теплицевом разложении перестановочны*:

$$BC = CB.$$

Выполним унитарное подобие, приводящее A к диагональному виду

$$U^*AU = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Числа $\lambda_j = \beta_j + i\gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ суть собственные значения матрицы A. Матрица U приводит к диагональному виду и каждую из матриц B и C:

$$U^*BU = \mathrm{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$
$$U^*CU = \mathrm{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Отсюда выводим

П р е д л о ж е н и е 2. *Собственные значения матрицы $B(C)$ суть вещественные* (*мнимые*) *части собственных значений нормальной матрицы A*.

В свою очередь, из предложений 1 и 2 вытекает

П р е д л о ж е н и е 3. *Собственными значениями эрмитовой матрицы $\xi B + \eta C$ $(\xi, \eta \in \mathbf{R})$ являются вещественные числа $\xi\beta_j + \eta\gamma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.*

Количество положительных и отрицательных собственных значений эрмитовой матрицы H называют её индексами инерции (соответственно положительным и отрицательным) и обозначают $n_+(H)$ и $n_-(H)$.

Применяя предложение 2 к разложению (1) нормальной матрицы A, немедленно получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Индексы $n_+(B)$ и $n_-(B)$ указывают число собственных значений матрицы A, находящихся соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} z < 0$. Тот же смысл по отношению к полуплоскостям $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ имеют числа $n_+(C)$ и $n_-(C)$.*

В дальнейшем удобно считать, что нормальная матрица A не имеет вещественных и чисто мнимых собственных значений. Если помимо арифметических операций допускается извлечение квадратных корней, то этому ограничению можно удовлетворить посредством конечного вычисления. Например, чтобы избавиться от вещественных собственных значений, нужно найти ядро $\mathcal{N}_C$ матрицы C, а затем сузить A на подпространство $\mathcal{N}_C^{\perp}$.

Это замечание можно обобщить. Пусть нужно удалить собственные значения A, лежащие на прямой $y = kx$. Если положить $\alpha = \operatorname{arctg} k$, то такие собственные значения суть вещественные собственные значения матрицы $e^{-i\alpha}A = (B\cos\alpha + C\sin\alpha) + i(C\cos\alpha - B\sin\alpha)$. Остаётся применить процедуру из предыдущего абзаца, заменяя в ней C матрицей $C\cos\alpha - B\sin\alpha$ или (чтобы не иметь дела с радикалами при рациональном k) матрицей $C - kB$.

3. Как известно, все собственные значения матрицы A лежат в круге

$$|z| \le \|A\|,$$

где в качестве $\|\cdot\|$ может быть взята, например, спектральная норма. Области локализации, рассматриваемые ниже, суть секторы этого круга, указываемые границами для аргументов точек соответствующего сектора.

Покажем вначале, как определить число собственных значений нормальной $(n \times n)$-матрицы A в каждом из четырёх открытых квадрантов комплексной плоскости. Обозначим соответствующие числа через n_1, n_2, n_3 и n_4. Три соотношения между ними очевидны:

$$n_1 + n_4 = n_+(B), \tag{2}$$

$$n_1 + n_2 = n_+(C), \tag{3}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n. \tag{4}$$

Недостающее соотношение получим, рассуждая таким образом: квадрат матрицы A есть снова нормальная матрица с теплицевым разложением $A^2 = B^2 - C^2 + i \cdot 2BC$. При возведении в квадрат в верхнюю полуплоскость попадут квадраты тех чисел $\lambda_j(A)$, что лежат в первой и третьей четвертях. Следовательно,

$$n_1 + n_3 = n_+(BC). \tag{5}$$

Система линейных уравнений (2)–(5) имеет определитель –2, а потому однозначно разрешима относительно n_1, n_2, n_3 и n_4.

Предполагая дополнительно, что A не имеет собственных значений на биссектрисах $y = \pm x$, можно таким же образом определить числа n_1, n_2, n_3 и n_4 для матрицы A^2. При этом число $n_1(A^2)$, например, интерпретируется как количество собственных значений A, попадающих в симметричные секторы $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$ и $\pi < \phi < \frac{5\pi}{4}$.

4. Как разделить собственные значения нормальной матрицы A, лежащие в этих двух симметричных секторах?

Пусть n_{11} и n_{12} — количества собственных значений A в секторах $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Аналогичный смысл по отношению к третьему квадранту имеют числа n_{31} и n_{32}. В обозначениях п. 3 верны соотношения

$$n_{11} + n_{12} = n_1, \tag{6}$$

$$n_{31} + n_{32} = n_3, \tag{7}$$

$$n_{11} + n_{31} = n_1(A^2). \tag{8}$$

Не хватает ещё одного соотношения.

Рассмотрим матрицу $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}A = (1 - i)(B + iC) = B + C + i(C - B)$. Положительный индекс инерции $n_+(B - C)$ указывает число собственных значений A, лежащих под биссектрисой $y = x$. Отсюда выводим

$$n_{11} + n_{32} + n_4 = n_+(B - C). \tag{9}$$

Используя (7), получаем

$$n_{11} + n_3 - n_{31} + n_4 = n_+(B - C).$$

Складывая это равенство с (8), находим n_{11}:

$$n_{11} = \frac{1}{2}(n_1(A^2) + n_+(B - C) - n_3 - n_4).$$

Зная n_{11}, вычисляем n_{12} из (6), n_{31} из (8) и n_{32} из (7).

5. Пусть известно число собственных значений нормальной матрицы A в каждом из симметричных

секторов $0 < \phi < \alpha$ и $\pi < \phi < \pi + \alpha$. Предположим, что A не имеет собственных значений на луче $\phi = \frac{\alpha}{2}$ и его продолжении $\phi = \pi + \frac{\alpha}{2}$, и покажем, как найти число её собственных значений в половинных секторах $0 < \phi < \frac{\alpha}{2}$ и $\pi < \phi < \pi + \frac{\alpha}{2}$. Этот переход и будет частным случаем предлагаемой бисекции.

Используем для желаемого перехода соображения и обозначения из предыдущего раздела. Числа n_1, n_3, n_{11}, n_{12}, n_{31}, n_{32} обозначают теперь количества собственных значений в секторах $0 < \phi < \alpha$, $\pi < \phi < \pi + \alpha$, $0 < \phi < \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2} < \phi < \alpha$, $\pi < \phi < \pi + \frac{\alpha}{2}$ и $\pi + \frac{\alpha}{2} < \phi < \pi + \alpha$. Тогда по-прежнему выполняются равенства (6) и (7), а если понимать $n_1(A^2)$ как число собственных значений матрицы A^2 в секторе $0 < \phi < \alpha$, то верно и равенство (8).

Обозначим через $n_3(A)$ и $n_4(A)$ количества собственных значений матрицы A в третьем и четвёртом квадрантах. Они были найдены (как n_3 и n_4) в п. 3. Матрица $e^{-i\frac{\alpha}{2}}A$ имеет теплицево разложение

$$e^{-i\frac{\alpha}{2}}A = \left(B\cos\frac{\alpha}{2} + C\sin\frac{\alpha}{2}\right) + i\left(C\cos\frac{\alpha}{2} - B\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Положительный индекс инерции $n_+\left(B\sin\frac{\alpha}{2} - C\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ указывает число собственных значений A, лежащих под прямой $y = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)x$. Отсюда выводим

$$n_{32} + n_3(A) - n_3 + n_4(A) + n_{11} = n_+\left(B\sin\frac{\alpha}{2} - C\cos\frac{\alpha}{2}\right). \tag{10}$$

Как и система (6)–(9) из п. 4, система (6)–(8), (10) однозначно определяет числа n_{11}, n_{12}, n_{31} и n_{32}.

6. До сих пор речь шла о секторах, прилегающих к вещественной оси. Однако к этой частной ситуации можно свести случай произвольного сектора $\delta < \phi < \varepsilon$. Достаточно заменить A матрицей $e^{-i\delta}A$. Применив к последней бисекцию, как она описана в п. 5, мы можем затем вернуться к матрице A.

Автор предполагает использовать описанный приём бисекции в задаче построения рационального алгоритма, проверяющего эрмитову конгруэнтность (или её отсутствие) для заданных пар нормальных матриц. Рациональными мы называем конечные алгоритмы, использующие только арифметические операции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.

ON THE BISECTION METHOD FOR NORMAL MATRICES

Kh. D. Ikramov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov December 13, 2018

Received December 14, 2018

A technique that can be considered an analog of the bisection method for Hermitian matrices is proposed for general normal matrices.

Keywords: bisection, normal matrix, Hermitian matrix, indices of inertia.