ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 6, с. 662–666

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.1+514.747

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ МАКСИМАЛЬНОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ДВУСТУПЕНЧАТЫХ СУБЛОРЕНЦЕВЫХ СТРУКТУРАХ

М. Б. Карманова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 24.12.2018 г.

Поступило 10.01.2019 г.

Выведены достаточные условия максимальности для поверхностей-графиков на двуступенчатых группах Карно с сублоренцевой структурой.

Ключевые слова: двуступенчатая группа Карно, контактное отображение, внутренняя мера, формула площади, максимальная поверхность, достаточное условие максимальности.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524856662-666

Цель сообщения — вывод достаточного условия максимальности для поверхностей-графиков, определённых на двуступенчатых нильпотентных градуированных группах с сублоренцевой структурой. Эти группы являются подклассом более общих неголономных структур, пространств Карно—Каратеодори, которые применяются при моделировании и решении разнообразных теоретических и прикладных задач (см., например, комментарии и ссылки на литературу в [1]). Под сублоренцевой структурой понимается неголономное обобщение геометрии Минковского; она и её применения подробно описаны в [2] и цитируемых источниках. Одни из первых результатов в исследовании таких объектов получены в [3]. Недавно в [4] автором установлены необходимые условия максимальности класса поверхностей-графиков и выведены уравнения максимальных поверхностей. Здесь и далее термин “максимальная поверхность” обозначает поверхность с максимальной площадью (подразумевается, что решение соответствующей краевой задачи существует). Подчеркнём [4], что в силу специфики неголономной геометрии определение приращения аргумента функционала площади существенно отличается от классического. А именно при изменении в аргументе горизонтальной части (которая может меняться произвольным образом) на ε в зависящей от неё второй части формулы, соответствующей полям степени два, появляются дополнительные слагаемые с множителем ε^2. Следовательно, при выводе достаточных условий максимальности и повторном дифференцировании функционала площади возникают дополнительные слагаемые, отсутствующие в римановой геометрии. Напомним, что в общем случае для отображений неголономных структур понятие “максимум площади” и “максимум значений функционала площади” различны, так как во втором случае функционал может принимать некоторое значение, но существование самого отображения, определяющего поверхность с данной площадью, не обязательно (в силу того, что соответствующая задача в частных производных не всегда разрешима).

Определение 1 (см., например, [5]). *Двуступенчатой группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т.е. представляется в виде $V = V_1 \oplus V_2$, $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = \{0\}$. Если условие $[V_1, V_1] = V_2$ заменить на $[V_1, V_1] \subset V_2$, то $\mathbb{G}$ называется *двуступенчатой нильпотентной градуированной группой (Ли)*. Если базисное поле принадлежит V_1, то его *степень* равна единице и оно называется *горизонтальным*. В противном случае степень равна двум. Базис выбран так, что для всякого поля степень определена однозначно.

Групповая операция определяется формулой Бейкера—Кэмпбелла—Хаусдорфа.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

Определение 2 (см. также [6]). Пусть $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$, $w, v \in \mathbb{G}$. Зададим величину $d_2(w, v)$ следующим образом:

$$d_2(w, v) = \max\left\{\left(\sum_{j:\deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

E-mail: *maryka@math.nsc.ru*

Множество $\{w \in \mathbb{G}: d_2(w, v) < r\}$ называется шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v, r)$.

Определение 3 [7]. Отображение $\varphi: U \to \tilde{\mathbb{L}}$, $U \subset \mathbb{L}$, где $\mathbb{L}$ и $\tilde{\mathbb{L}}$ — произвольные пространства Карно—Каратеодори, *hc*-дифференцируемо в точке $x \in U$, если существует горизонтальный гомоморфизм локальных однородных групп $\mathcal{L}_x: \mathcal{G}^x\mathbb{L} \to \mathcal{G}^{\varphi(x)}\tilde{\mathbb{L}}$ такой, что $d_2(\varphi(w), \mathcal{L}_x\langle w\rangle) = o(d_2(x, w))$, $U \ni w \to x$. hc-дифференциал $\mathcal{L}_x$ в точке x обозначается символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Замечание 1. Нильпотентные градуированные группы $\mathbb{G}$ являются частным случаем пространств Карно—Каратеодори. В каждой точке имеем $\mathcal{G}^x\mathbb{G} = \mathbb{G}$.

Определение 4 (см., например, [7]). Если горизонтальные производные отображения φ существуют всюду, непрерывны и образ горизонтальных полей горизонтален, то φ принадлежит классу C^1_H.

Теорема 1 [7]. *Если φ — C^1_H-отображение группы Карно в нильпотентную градуированную группу, то оно непрерывно hc-дифференцируемо всюду. Кроме того, матрица субриманова дифференциала имеет блочно-диагональную структуру с блоками $(\hat{D}\varphi)_H$ и $(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}$, где первый блок соответствует полям из V_1 и $\tilde{V}_1$, а второй — из V_2 и $\tilde{V}_2$.*

Для введения понятия отображения-графика на нильпотентных градуированных группах, а также для корректной постановки задачи нам потребуется

Описание 1. Будем рассматривать $\varphi: \Omega \to \tilde{\mathbb{G}}$, где:

1) $\varphi: \Omega \to \tilde{\mathbb{G}}$ — контактное отображение класса C^1_H, а $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество;

2) $\mathbb{G}$ — группа Карно топологической размерности N с базисными полями $X_1, \ldots, X_N$, алгеброй Ли векторных полей $V = V_1 \oplus V_2$, где поля $X_1, \ldots, X_{\dim V_1}$ составляют базис V_1, и единицей $\mathbf{0}$;

3) всякое поле степени два на $\mathbb{G}$ представимо через коммутаторы горизонтальных полей единственным образом (для произвольного выбора изменения аргумента [4, 8]);

4) $\tilde{\mathbb{G}}$ — двуступенчатая нильпотентная градуированная группа топологической размерности $\tilde{N}$ с базисными полями $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$, алгеброй Ли векторных полей $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \oplus \tilde{V}_2$, где поля $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}$ составляют базис $\tilde{V}_1$, и единицей $\tilde{\mathbf{0}}$;

5) $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}} \subset \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — двуступенчатая нильпотентная градуированная группа топологической размерности $N + \tilde{N}$, $\mathbb{G} \cap \tilde{\mathbb{G}} = 0 = (\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{0}})$;

6) поля $X_1, \ldots, X_N$ и $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ совпадают с ограничениями базисных полей на $\mathbb{U}$ на группы $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ соответственно, и, кроме того, их степени совпадают с таковыми на $\mathbb{U}$.

Декартово произведение $\mathbb{G} \times \tilde{\mathbb{G}}$ является частным случаем $\mathbb{U}$.

Определение 5. Отображение-график φ_Γ сопоставляет каждой точке $x \in \Omega$ элемент $\varphi_\Gamma(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x)\tilde{X}_j\right)(x) \in \mathbb{U}$, где

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\tilde{N}} \varphi_j(x)\tilde{X}_j\right)(\tilde{\mathbf{0}}) = \varphi(x) \in \tilde{\mathbb{G}}.$$

Перейдём к описанию сублоренцевой структуры на $\mathbb{U}$. Для этого разобьём базисные поля на “положительные”, квадрат длины интегральных кривых которых положителен, и “отрицательные”, соответствующие отрицательному квадрату длины.

Обозначение 1. Положим $\{X_1, \ldots, X_N, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\tilde{N}}\} = \{Y_1, \ldots, Y_{\hat{N}}\}$, где $\hat{N} = N + \tilde{N}$. Кроме того, пусть алгебра Ли $\hat{V}$ на $\mathbb{U}$ равна $\hat{V}_1 \oplus \hat{V}_2$, где $[\hat{V}_1, \hat{V}_1] \subset \hat{V}_2$, причём $(X_1, \ldots, X_{\dim V_1}, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}) = (Y_1, \ldots, Y_{\dim \hat{V}_1^+}, Y_{\dim \hat{V}_1^+ + 1}, \ldots, Y_{\dim \hat{V}_1})$, где $\{Y_{\dim \hat{V}_1^+ + 1}, \ldots, Y_{\dim \hat{V}_1}\} = \{\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1}\}$, и $(X_{\dim V_1 + 1}, \ldots, X_N, \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1 + 1}, \ldots, X_{\tilde{N}}) = (Y_{\dim \hat{V}_1 + 1}, \ldots, Y_{\dim \hat{V}_1 + \dim \hat{V}_2^+}, Y_{\dim \hat{V}_1 + \dim \hat{V}_2^+ + 1}, \ldots, Y_{\hat{N}})$, где $(Y_{\dim \hat{V}_1 + \dim \hat{V}_2^+ + 1}, \ldots, Y_{\hat{N}}) = (\tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1 + 1}, \ldots, X_{\tilde{N}})$. Обозначим $\dim \hat{V}_2 = \hat{N} - \dim \hat{V}_1$, $\dim \hat{V}_1^- = \dim \hat{V}_1 - \dim \hat{V}_1^+$ $(= \dim \tilde{V}_1)$ и $\dim \hat{V}_2^- = \dim \hat{V}_2 - \dim \hat{V}_2^+ (= \dim \tilde{V}_2)$.

Определение 6. Для векторного поля $T = \sum_{j=1}^{\hat{N}} y_j Y_j$ с постоянными коэффициентами положим квадратную сублоренцеву норму равной

$$\mathbf{d}_2^{SL^2}(T) = \max\left\{\sum_{j=1}^{\dim \hat{V}_1^+} y_j^2 - \sum_{k=1}^{\dim \hat{V}_1^-} y^2_{\dim \hat{V}_1^+ + k},\right.$$

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{\dim \hat{V}_2^+} y^2_{\dim \hat{V}_1 + j} - \sum_{k=1}^{\dim \hat{V}_2^-} y^2_{\dim \hat{V}_1 + \dim \hat{V}_2^+ + k}\right) \times$$

$$\left.\times \left|\sum_{j=1}^{\dim \hat{V}_2^+} y^2_{\dim \hat{V}_1 + j} - \sum_{k=1}^{\dim \hat{V}_2^-} y^2_{\dim \hat{V}_1 + \dim \hat{V}_2^+ + k}\right|^{1/2}\right\}.$$

Определение 7. Пусть $w = \exp(T)(v)$, где $T = \sum_{j=1}^{\hat{N}} y_j Y_j$. Положим $\mathfrak{d}_2^2(v, w) = \mathbf{d}_2^{SL^2}(T)$. Величину $\mathfrak{d}_2^2(v, w)$ будем называть квадратным сублоренцевым расстоянием.

Определение 8. Шар относительно $\mathfrak{d}_2^2$ с центром в точке v и радиуса r — это множество $\mathrm{Box}^{SL}(v, r) = \{x \in \mathbb{U}\colon \mathfrak{d}_2^2(v, x) < r^2\}$.

Обозначение 9. Строки матрицы hc-дифференциала с номерами $1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$ обозначим символом $(\hat{D}\varphi)_H(x)$. Будем полагать, что квадраты длин его столбцов не превосходят $\dfrac{1}{\dim V_1} - c$, $c > 0$. Блок, начинающийся со строки с номером $\dim\tilde{V}_1 + 1$, обозначим символом $(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}(x)$ и будем считать, что квадраты длин его столбцов не превосходят $\dfrac{1}{\dim V_2} - c,\ c > 0$.

Теорема 2 [9]. *Сублоренцева внутренняя* ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$-*мера образа* $\varphi_\Gamma(\Omega) \subset \mathbb{U}$ *равна*

$$\int_\Omega {}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, x)\,d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\varphi_\Gamma(\Omega)} d\,{}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu(y),$$

где сублоренцев якобиан ${}^{SL}\mathcal{J}(\varphi, x)$ *равен*

$$\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)_H(x)^*(\hat{D}\varphi)_H(x))}\times$$
$$\times\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)_{H^\perp}(x)^*(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}(x))},$$

а символ $E_{\dim V_k}$ *обозначает единичную матрицу размерности* $\dim V_k$, $k = 1, 2$.

Символ ${}^{SL}\mathcal{H}_\Gamma^\nu$ обозначает внутреннюю сублоренцеву меру. Она получается в результате применения конструкции Каратеодори к системе шаров в некотором модифицированном, внутреннем, базисе, который мало отличается от исходного, однако с его помощью согласуются неголономные структуры образа отображения и пространства-образа (см. описание такого базиса в [8], а подробное описание построения меры в [9]).

Опишем основные результаты сообщения о свойствах максимальных поверхностей.

Определение 10 (ср. [10]). Функционал площади $S(\varphi)$, действующий на классе графиков, построенных по контактным отображениям класса C_H^1, — это

$$\int_\Omega \sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)_H^*(\hat{D}\varphi)_H)}\times$$
$$\times\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)_{H^\perp}^*(\hat{D}\varphi)_{H^\perp})}\,d\mathcal{H}^\nu. \qquad (1)$$

Приращение функционала площади на элементе $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^{\dim\tilde{V}_1}$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\dim\tilde{V}_1})$, будет равно $S(\varphi, \xi, \varepsilon) - S(\varphi)$, где величина $S(\varphi, \xi, \varepsilon)$ определяется как интеграл по Ω выражения

$$\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - ((\hat{D}\varphi)_H + \varepsilon D_H\xi)^*((\hat{D}\varphi)_H + \varepsilon D_H\xi))}\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - ((\hat{D}\varphi)_{H^\perp} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)^*((\hat{D}\varphi)_{H^\perp} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2))},$$

символ D_H обозначает дифференцирование только по горизонтальным полям, а P_1 и P_2 — зависящие от $x \in \Omega$ линейные операторы, причём коэффициенты в $P_1(x)$ зависят от первых горизонтальных производных ξ_k в первой степени, а коэффициенты $P_2(x)$ — во второй, $k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$ (см. их подробное описание в [10]).

Введём нормы для описания дифференциальных свойств функционала площади.

Определение 11. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$, $\xi_1, \ldots, \xi_{\dim\tilde{V}_1} \in C_H^1(\Omega, \mathbb{R})$ и $m \in \mathbb{N}$. Положим норму $\|\xi\|_m$ для ξ равной

$$\|\xi\|_m = \left(\int_\Omega \sum_{k=1}^{\dim\tilde{V}_1} |\xi_k(x)|^m + \sum_{\beta:|\beta|=m} |\hat{\xi}(x)^\beta|\,d\mathcal{H}^\nu(x)\right)^{1/m},$$

а (полу)норму $\|\xi\|_{H,m}$ для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{\dim\tilde{V}_1})$ равной

$$\|\xi\|_{H,m} = \left(\int_\Omega \sum_{\beta:|\beta|=m} |\hat{\xi}(x)^\beta|\,d\mathcal{H}^\nu(x)\right)^{1/m},$$

где $\hat{\xi} = (X_1\xi_1, \ldots, X_1\xi_{\dim\tilde{V}_1}, X_2\xi_1, \ldots, X_{\dim V_1}\xi_{\dim\tilde{V}_1})$.

Теорема 3. *Функционал площади* (1) *дважды дифференцируем относительно нормы* $\|\cdot\|_{\max\{6\dim V_1, 12\dim V_2\}}$. *Если* Ω *горизонтально достижима, то* $\|\cdot\|_{H,\max\{6\dim V_1, 12\dim V_2\}}$ *является нормой, и* (1) *также дважды дифференцируем относительно неё.*

Приведём условие, которое является отличительной особенностью неголономного двуступенчатого случая от более простых, включая задачи, когда "отрицательные" направления имеют только степень один. Прежде чем его формулировать, опишем вид второй производной функционала площади. Из непосредственных вычислений следует, что она оценивается сверху интегралом от

$$\frac{1}{2}\frac{f_1''(\varepsilon)\sqrt{f_2(\varepsilon)}}{\sqrt{f_1(\varepsilon)}} + \frac{1}{2}\frac{f_2''(\varepsilon)\sqrt{f_1(\varepsilon)}}{\sqrt{f_2(\varepsilon)}},$$

где

$$f_1(\varepsilon) = \det(E_{\dim V_1} - ((\hat{D}\varphi)_H + \varepsilon D_H\xi)^* \times \times ((\hat{D}\varphi)_H + \varepsilon D_H\xi)),$$

$$f_2(\varepsilon) = \det(E_{\dim V_2} - ((\hat{D}\varphi)_{H^\perp} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)^* \times \times ((\hat{D}\varphi)_{H^\perp} + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2)),$$

причём коэффициенты операторов в P_1 и P_2 зависят от структурных констант на группе. Следовательно, для вывода адекватной оценки сверху значения $f_2''(\varepsilon)$, которая выражалась бы через модули производных ξ, необходимы требования на величины горизонтальных производных φ, обеспечивающие подходящие оценки коэффициентов при $D_H\xi$. И если вторая производная f_1 совпадает с суммой определителей матриц, где либо одна строка с номером k заменена на $-2D_H\xi_k \cdot D_H\xi$, либо строки с номерами i и j, $i \neq j$, заменены на $-D_H\xi_i \cdot (\hat{D}\varphi)_H - (\hat{D}\varphi_i)_H \cdot D_H\xi$ и $-D_H\xi_j \cdot (\hat{D}\varphi)_H - (\hat{D}\varphi_j)_H \cdot D_H\xi$ соответственно, $i, j, k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_1$ (здесь индексы относятся к столбцам матриц), то для f_2 такие замены выглядят уже не настолько явно. А именно мы получаем, что либо одна строка с номером k заменена на $-2(P_2^*)_k \cdot D_H\xi - 2(P_1^*)_k P_1 - 2((\hat{D}\varphi)_{H^\perp})_k P_2$, либо строки с номерами i и j, $i \neq j$, заменены на $-(P_1^*)_i \cdot (\hat{D}\varphi)_{H^\perp} - (\hat{D}\varphi_i)_H \cdot P_1$ и $-(P_1^*)_j \cdot (\hat{D}\varphi)_{H^\perp} - (\hat{D}\varphi_j)_H \cdot P_1$ соответственно, $i, j, k = 1, 2, \ldots, \dim\tilde{V}_2$ (здесь индексы относятся к столбцам матриц). Напомним, что элементы $(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}$ зависят от элементов блока $(\hat{D}\varphi)_H$, P_1 зависит от скалярных произведений горизонтальных производных φ и ξ, а P_2 — от скалярных произведений только горизонтальных производных ξ (см. описание в [10]). Следовательно, условия, при которых вторая производная оценивается сверху через $\|D_H\xi\|^2$, для горизонтальной части выглядят стандартно, тогда как для выполнения этого условия для f_2'' необходимы дополнительные условия на горизонтальные производные φ в зависимости от структурных констант. В основном результате сообщения, достаточном условии максимальности поверхности-графика, мы предполагаем, что эти производные достаточно малы для корректности всех рассуждений доказательства теоремы, и вторые производные f_1 и f_2 оцениваются сверху значением $-\|D_H\xi\|^2$.

Теорема 4. *Если существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\int_\Omega \|D_H\xi\|^2 \left(\frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(\hat{D}\varphi)_{H^\perp})}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(\hat{D}\varphi)_H)}} + \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(\hat{D}\varphi)_H)}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(\hat{D}\varphi)_{H^\perp})}} \right) d\mathcal{H}^\nu(x) \geq \geq K\|\xi\|^2_{\max\{6\dim V_1, 12\dim V_2\}},$$

и выполнено необходимое условие максимальности (ср. [10])

$$\int_\Omega \mathcal{D}_1(\varphi, \xi) \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(\hat{D}\varphi)_{H^\perp})}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(\hat{D}\varphi)_H)}} + \mathcal{D}_2(\varphi, \xi) \frac{\sqrt{\det(E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(\hat{D}\varphi)_H)}}{\sqrt{\det(E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(\hat{D}\varphi)_{H^\perp})}} d\mathcal{H}^\nu = 0,$$

где

$$\mathcal{D}_1(\varphi, \xi, x) = \sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1} \langle D_H\xi_i(x), (\hat{D}\varphi_j)_H(x)\rangle \times \times (E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(x)(\hat{D}\varphi)_H(x))_{ij} + \sum_{i=1}^{\dim V_1}\sum_{j=1}^{\dim V_1} \langle(\hat{D}\varphi_i)_H(x), D_H\xi_j(x)\rangle \times \times (E_{\dim V_1} - (\hat{D}\varphi)^*_H(x)(\hat{D}\varphi)_H(x))_{ij},$$

кроме того,

$$\mathcal{D}_2(\varphi, \xi, x) = \sum_{i=1}^{\dim V_2}\sum_{j=1}^{\dim V_2} \langle (P_1)_i(x), ((\hat{D}\varphi)_{H^\perp})_j(x)\rangle \times \times (E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(x)(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}(x))_{ij} + \sum_{i=1}^{\dim V_2}\sum_{j=1}^{\dim V_2} \langle((\hat{D}\varphi)_{H^\perp})_i(x), (P_1)_j(x)\rangle \times \times (E_{\dim V_2} - (\hat{D}\varphi)^*_{H^\perp}(x)(\hat{D}\varphi)_{H^\perp}(x))_{ij},$$

то на φ функционал площади достигает максимального значения в его окрестности.

Для горизонтально достижимой области Ω вместо $\|\cdot\|_{\max\{6\dim V_1,\, 12\dim V_2\}}$ можно использовать норму $\|\cdot\|_{H,\, \max\{6\dim V_1,\, 12\dim V_2\}}$.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 17–01–00875.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karmanova M.*, *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot—Carathéodory Spaces, Differentiability, Coarea and Area Formulas // Anal. and Math. Physics. Birkhäuser, 2009. P. 233–335.

2. *Миклюков В.М.*, *Клячин А.А.*, *Клячин В.А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. http://www.uchimsya.info/maxsurf.pdf
3. *Берестовский В.Н.*, *Гичев В.М.* // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11. В. 4. С. 1–34.
4. *Карманова М.Б.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 1. С. 16–20.
5. *Folland G.B.*, *Stein E.M.* Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
6. *Карманова М.Б.* // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 2. С. 232–254.
7. *Vodopyanov S.* // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–301.
8. *Карманова М.Б.* Минимальные поверхности-графики на произвольных двуступенчатых группах Карно // Изв. вузов. Математика. 2019.
9. *Карманова М.Б.* Площадь поверхностей-графиков на группах Карно с сублоренцевой структурой // ДАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 145–148.
10. *Карманова М.Б.* О минимальных поверхностях на двуступенчатых группах Карно // ДАН. 2019. Т. 485. № 4. С. 410–414.

SUFFICIENT MAXIMALITY CONDITIONS FOR SURFACES ON TWO-STEP SUB-LORENTZIAN STRUCTURES

M. B. Karmanova

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak December 24, 2018

Received January 10, 2019

We deduce sufficient maximality conditions for graph surfaces on two-step Carnot groups with sub-Lorentzian structure.

Keywords: two-step Carnot group, contact mapping, intrinsic measure, area formula, maximal surface, sufficient maximality condition.