УДК 512.643

О БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦАХ

Академик РАН В. П. Платонов^{1,2,*}, М. М. Петрунин^{1,**}

Поступило 23.01.2019 г.

Построено параметрическое семейство бесконечномерных целочисленных ганкелевых матриц, каждая из которых обладает следующим свойством: её главные подматрицы невырождены, а множество простых делителей определителей главных подматриц совпадает с множеством всех простых чисел.

Ключевые слова: ганкелевы матрицы, фундаментальные единицы, эллиптические кривые, эллиптические поля, простые числа.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524856667-669>

В работе [2] на основе исследованной в [1] глубокой связи между ганкелевыми матрицами и эллиптическими полями была индуктивно построена бесконечномерная ганкелева матрица H_∞ с главными подматрицами H_r степени $r = 1, 2, 3, \dots$, обладающая следующими удивительными свойствами:

- (i) все элементы матриц имеют вид $m/2^l$, где m и l — целые числа;
- (ii) $\det H_r \neq 0$ для всех $r = 1, 2, \dots$;
- (iii) множество простых делителей числителей определителей $\det H_r$, $r = 1, 2, 3, \dots$, совпадает со множеством всех простых чисел за исключением двойки.

Умножение H_∞ на подходящую степень 2^t , очевидно, позволяет включить в число делителей числителей главных миноров, т.е. определителей главных подматриц, матрицы $2^t H_\infty$ и двойку. Однако оставался открытым вопрос о существовании H_∞ (строящейся, как в [2] для приведённых многочленов) с подобным свойством. В статье [3] нами был дан положительный ответ на этот вопрос.

После этого возникает естественный вопрос о существовании целочисленной бесконечномерной ганкелевой матрицы такой, что среди множества простых делителей её главных миноров встречаются все простые числа, а главные миноры указанной бесконечномерной ганкелевой матрицы не обращаются в нуль. В настоящей работе получен ответ

на этот вопрос, более того, построено параметрическое семейство таких матриц.

Пусть K — поле характеристики, отличной от 2.

Теорема 1. *Существует бесконечное множество бесконечномерных целочисленных ганкелевых матриц такое, что любая бесконечномерная ганкелева матрица H_∞ из этого множества с главными подматрицами H_r степени $r = 1, 2, 3, \dots$, обладает следующими свойствами:*

- (i) *все элементы матриц являются целыми числами;*
- (ii) $\det H_r \neq 0$ для всех $r = 1, 2, \dots$;
- (iii) *множество простых делителей определителей $\det H_r$, $r = 1, 2, 3, \dots$, совпадает со множеством всех простых чисел.*

Доказательство. Рассмотрим семейство бесквадратных многочленов вида $f = a^2x^4 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $b^4 \neq 8a^2c^3$. В теореме 2.2 работы [1] показано, что кольцо $D_f = \alpha + \beta\sqrt{f}$, $\alpha, \beta \in K[x]$, не содержит фундаментальных единиц, а рассуждения, аналогичные рассуждениям в [2], показывают, что в этом случае множество простых делителей числителей главных миноров бесконечномерной целочисленной ганкелевой матрицы H_∞ содержит все простые числа, за исключением, быть может, простых делителей числителя дискриминанта и знаменателей коэффициентов многочлена f , при том что конечномерные главные миноры H_∞ не обращаются в нуль, где

$$H_\infty = \begin{pmatrix} d_{-1} & d_{-2} & \cdots & d_{-r} & \cdots \\ d_{-2} & d_{-3} & \cdots & d_{-r-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ d_{-r} & d_{-r-1} & \cdots & d_{-2r+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

¹Федеральный научный центр

Научно-исследовательский институт системных исследований Российской Академии наук, Москва

²Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*E-mail: platonov@niisi.ras.ru**E-mail: petrunin@niisi.ras.ru

и d_i — коэффициенты разложения $\sqrt{f} = d_2x^2 + d_1x + d_0 + d_{-1}x^{-1} + \dots$ в формальный степенной ряд Лорана в поле формальных степенных рядов $K((x^{-1}))$.

Пусть $f_4 = a^2$, $f_3 = f_2 = 0$, $f_1 = b$, $f_0 = c$ и $f_i = 0$ для $i < 0$. Тогда без ограничения общности зафиксировав вложение $K(x)(\sqrt{f})$ в $K((x^{-1}))$, коэффициенты d_i можно вычислить по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} d_2 &= \sqrt{f_4}, \\ d_{2-k} &= \frac{1}{2d_2} \left(f_{4-k} - \sum_{i=1}^{k-1} d_{2-i} d_{2-k+i} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, если положить $a = \frac{1}{2l}$ и $l, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, мы можем утверждать, что все полученные по рекуррентным формулам $d_i \in \mathbb{Z}$ для $i < 0$, а следовательно, матрица H_∞ целочисленная, и все её миноры являются целыми.

Умножение такой матрицы H_∞ на простые делители $p_1, p_2, \dots$ числителя дискриминанта $\Delta(f)$ и знаменателей коэффициентов многочлена f в соответствующих степенях позволяет включить в число делителей матрицы $\prod p_i^l H_\infty$ и простые p_i , что завершает доказательство теоремы.

Пример. Положим $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 3$. Дискриминант $\Delta(f)$ многочлена $f = \frac{1}{4}x^4 + 2x + 3$ равен 3^4 . Откуда, следуя ходу рассуждений теоремы 1, можно утверждать, что для каждого простого $p \neq 2, 3$ среди главных миноров соответствующей матрицы H_∞ , построенной по разложению $\sqrt{f}$ в ряд Лорана, найдутся такие миноры, которые делятся на p .

Разложение $\sqrt{f}$ в ряд Лорана имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{f} &= \frac{1}{2}x^2 + 2x^{-1} + 3x^{-2} - 4x^{-4} - \\ &\quad - 12x^{-5} - 9x^{-6} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим ганкелеву матрицу H_2 , ассоциированную с разложением (2):

$$H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Её определитель равен -3^2 , а определитель матрицы H_1 равен 2, что позволяет заключить, что в число делителей главных миноров бесконечной целочисленной ганкелевой матрицы H_∞ входят все простые числа без исключения.

В теореме 1 приведено множество матриц с указанными свойствами, которое, однако, непредставимо в явном виде в силу того, что указанные матрицы получаются путём вычисления дискриминантов соответствующих многочленов и существенно зависят от разложения дискриминантов на простые множители.

Следующая теорема 2 доказывает существование семейства бесконечномерных целочисленных ганкелевых матриц, зависящего от одного параметра, построенного в явном виде, и обладающего свойствами, указанными в условии теоремы 1.

Теорема 2. *Существует однопараметрическое семейство бесконечномерных целочисленных ганкелевых матриц такое, что любая бесконечномерная ганкелева матрица $H_\infty(t)$ из этого семейства с главными подматрицами $H_r(t)$ степени $r = 1, 2, 3, \dots$ обладает следующими свойствами, выполненными для каждого $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:*

- (i) *все элементы матриц являются целыми числами;*
- (ii) *$\det H_r(t) \neq 0$ для всех $r = 1, 2, \dots$;*
- (iii) *множество простых делителей определителей $\det H_r(t)$, $r = 1, 2, 3, \dots$, совпадает со множеством всех простых чисел.*

Доказательство. Пусть $f = a^2x^4 + bx + c$. Тогда дискриминант этого многочлена $\Delta(f) = -(27b^4 - 256c^3a^2)a^4$, а разложение $\sqrt{f}$ в ряд Лорана можно вычислить по формуле (1). Оно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{f} &= ax^2 + \frac{b}{2ax} + \frac{c}{2ax^2} - \frac{b^2}{(2a)^3x^4} - \frac{2bc}{(2a)^3x^5} - \\ &\quad - \frac{c^2}{(2a)^3x^6} + \frac{2b^3}{(2a)^5x^7} + \frac{6b^2c}{(2a)^5x^8} + \frac{6bc^2}{(2a)^5x^9} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Рассуждения, используемые в доказательстве теоремы 1, позволяют построить бесконечномерную ганкелеву матрицу по разложению (3):

$$H_\infty = \begin{pmatrix} \frac{b}{2a} & \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{b^2}{8a^3} & -\frac{bc}{4a^3} & \dots \\ \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{b^2}{8a^3} & -\frac{bc}{4a^3} & -\frac{c^2}{8a^3} & \dots \\ 0 & -\frac{b^2}{8a^3} & -\frac{bc}{4a^3} & -\frac{c^2}{8a^3} & \frac{b^3}{16a^5} & \dots \\ -\frac{b^2}{8a^3} & -\frac{bc}{4a^3} & -\frac{c^2}{8a^3} & \frac{b^3}{16a^5} & \frac{3b^2c}{16a^5} & \dots \\ -\frac{bc}{4a^3} & -\frac{c^2}{8a^3} & \frac{b^3}{16a^5} & \frac{3b^2c}{16a^5} & \frac{3bc^2}{16a^5} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Первые главные миноры бесконечномерной ганкелевой матрицы H_∞ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\det H_1 &= \frac{b}{2a}, \\ \det H_2 &= -\frac{c^2}{(2a)^2}, \\ \det H_3 &= -\frac{(b^4 - 8c^3a^2)b}{(2a)^7}, \\ \det H_4 &= -\frac{b^8 - 8b^4c^3a^2 - 16c^6a^4}{(2a)^{12}}, \\ \det H_5 &= \frac{(b^8 - 12b^4c^3a^2 + 24c^6a^4)bc^2}{(2a)^{17}}, \\ \det H_6 &= \\ &= \frac{b^{16} - 24b^{12}c^3a^2 + 208b^8c^6a^4 - 640b^4c^9a^6 - 256c^{12}a^8}{(2a)^{26}}.\end{aligned}$$

Если $a = \frac{1}{2l}, l \neq 0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то бесконечномерная ганкелева матрица H_∞ целочисленная. Если допол-

нительно $b \neq 0, c \neq 0$ и $b^4 \neq 8a^2c^3$, то соответствующее кольцо D_f не имеет нетривиальных единиц, откуда, следуя рассуждениям из доказательства теоремы 1, остаётся только добиться делимости главных миноров на простые множители дискриминанта и простые множители числа $2l$.

Пусть $a = \frac{1}{4}, b = (2t)^3, c = (2t)^4, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тогда $b^4 \neq 8a^2c^3$ и $\Delta(f) = -2^4 \cdot 11 \cdot t^{12}$. Простыми делителями $\Delta(f)$ являются множество простых делителей t и простые числа 2 и 11. Для таких параметров a, b, c первый главный минор равен $\det H_1 = 2^4 t^3$, т.е. делится на все простые делители t и на 2, а пятый главный минор равен $\det H_5 = 2^{48} \cdot 11 \cdot t^{35}$.

Таким образом, семейство бесконечномерных целочисленных матриц $H_\infty(t)$ обладает свойствами, указанными в условии настоящей теоремы, где матрица $H_\infty(t)$ получена из (4) путём подстановки приведённых выше параметров a, b, c , а $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$H_\infty(t) = \begin{pmatrix} 16t^3 & 32t^4 & 0 & -512t^6 & -2048t^7 & -2048t^8 & \dots \\ 32t^4 & 0 & -512t^6 & -2048t^7 & -2048t^8 & 32768t^9 & \dots \\ 0 & -512t^6 & -2048t^7 & -2048t^8 & 32768t^9 & 196608t^{10} & \dots \\ -512t^6 & -2048t^7 & -2048t^8 & 32768t^9 & 196608t^{10} & 393216t^{11} & \dots \\ -2048t^7 & -2048t^8 & 32768t^9 & 196608t^{10} & 393216t^{11} & -2359296t^{12} & \dots \\ -2048t^8 & 32768t^9 & 196608t^{10} & 393216t^{11} & -2359296t^{12} & -20971520t^{13} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Платонов В.П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69. № 1. С. 3–38.
2. Платонов В.П. О новых свойствах ганкелевых матриц над полем рациональных чисел // УМН. 2017. Т. 72. № 5 (437). С. 187–188.
3. Платонов В.П., Петрунин М.М. О новых арифметических свойствах определителей ганкелевых матриц // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 484–485.

ON INFINITE-DIMENSIONAL INTEGER HANKEL MATRICES

Academician of the RAS V. P. Platonov^{1,2}, M. M. Petrunin¹

¹Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Steklov Mathematical Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Received January 23, 2019

We construct a parametric family of infinite-dimensional integer Hankel matrices, each of matrices of this family has the following property: its principal submatrices are nonsingular, and the set of prime divisors of the determinants of the principal submatrices coincides with the set of all primes.

Keywords: Hankel matrices, fundamental units, elliptic curves, elliptic fields, prime numbers.