

УДК 532.5.031, 517.938.5

БИФУРКАЦИИ ТОРОВ ЛИУВИЛЛЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ ВИХРЕЙ В БОЗЕ-ЭЙНШТЕЙНОВСКОМ КОНДЕНСАТЕ, ИМЕЮЩИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

П. Е. Рябов

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.12.2018 г.

Поступило 13.12.2018 г.

Рассматривается вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система с двумя степенями свободы, которая описывает динамику двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармонической ловушке. Для вихревой пары положительной интенсивности обнаружена бифуркация трёх лиувиллевых торов в один. Такая бифуркация встречалась в интегрируемом случае Горячева—Чаплыгина—Сретенского в динамике твёрдого тела. Для интегрируемого возмущения физического параметра отношения интенсивностей такая бифуркация оказалась неустойчивой, что привело к бифуркациям типа двух торов в один, и наоборот.

Ключевые слова: вполне интегрируемые гамильтоновы системы, бифуркационная диаграмма отображения момента, бифуркации торов Лиувилля, динамика вихрей, бозе-эйнштейновский конденсат.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524856670-675>

В аналитической динамике вихревых структур центральное место занимают интегрируемые модели точечных вихрей на плоскости. Исследования динамики вихрей, но уже в квантовой физике показали, что квантовые вихри ведут себя примерно так же, как тонкие вихревые нити, изучаемые в классической гидродинамике. Особое место при этом занимают вихревые структуры в бозе-эйнштейновском конденсате, полученном для ультрахолодных атомных газов [1]. В данном сообщении будет рассмотрена математическая модель динамики двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармонической ловушке [2]. Эта модель приводит к вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе с двумя степенями свободы, и по этой причине могут быть применены топологические методы, используемые в таких системах. Топологические методы успешно показали себя при исследовании устойчивости абсолютных и относительных хореографий [3–6]. Этим движениям в интегрируемых моделях, как правило, соответствуют значения постоянных первых интегралов, для которых сами интегралы, рассматриваемые как функции от фазовых переменных, оказываются за-

висимыми в смысле линейной зависимости дифференциалов. Основную роль при изучении такой зависимости играет бифуркационная диаграмма отображения момента.

Настоящее сообщение посвящено интегрируемому возмущению рассматриваемой модели. В данной работе явно определена бифуркационная диаграмма и исследованы бифуркации торов Лиувилля. В случае вихревой пары положительной интенсивности для некоторых значений физических параметров обнаружена бифуркация трёх торов в один. Указанная бифуркация встречалась ранее в работах М.П. Харламова при изучении фазовой топологии интегрируемого случая Чаплыгина—Горячева—Сретенского в динамике твёрдого тела [7] и как одна из особенностей в виде 2-атома особого слоя лиувиллева слоения в работах А.Т. Фоменко, А.В. Болсинова, С.В. Матвеева [8]. В работе А.А. Ошемкова и М.А. Тужилина [9], посвящённой расщепляемости седловых особенностей, такая бифуркация оказалась неустойчивой и приведены её возмущённые слоения, одно из которых реализуется в рассматриваемой интегрируемой модели.

1. МОДЕЛЬ И НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Математическая модель динамики двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармонической ловушке, описывается

Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации, Москва
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова
Российской Академии наук, Москва
Удмуртский государственный университет, Ижевск
E-mail: peryabov@fa.ru

системой дифференциальных уравнений, которая может быть представлена в гамильтоновой форме [2]

$$\dot{\zeta} = \{\zeta, H\} \tag{1}$$

с функцией Гамильтона

$$H = \ln[1 - (x_1^2 + y_1^2)] + a^2 \ln[1 - (x_2^2 + y_2^2)] - ab \ln[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]. \tag{2}$$

Здесь через (x_k, y_k) обозначены декартовы координаты k -го вихря ($k = 1, 2$), фазовый вектор ζ имеет координаты $\{x_1, y_1, x_2, y_2\}$, параметр a обозначает отношение интенсивностей $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$. Физический параметр b характеризует относительное взаимодействие вихрей в гармонической ловушке [2, 10]. В работах [11, 12] такой параметр принимался равным единице, тем не менее в ряде физических работ [2, 10] для параметра b в случае вихревой пары положительной интенсивности ($a = 1$) на основе экспериментальных данных принимались и другие значения $b = 2$; $b = 1,35$; $b = 0,1$. В связи с чем представляет интерес исследование фазовой топологии, когда параметр b принимает любые положительные значения.

Фазовое пространство \mathcal{P} задаётся в виде прямого произведения двух открытых кругов радиуса 1, с выколотым множеством столкновений вихрей

$$P = \{(x_1, y_1, x_2, y_2): x_1^2 + y_1^2 < 1, x_2^2 + y_2^2 < 1\} \setminus \{x_1 = x_2, y_1 = y_2\}.$$

Пуассонова структура на фазовом пространстве \mathcal{P} задаётся в стандартном виде

$$\{x_i, y_j\} = \frac{1}{\Gamma_i} \delta_{ij}, \tag{3}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Система (1) допускает один дополнительный первый интеграл движения — момент завихренности

$$F = x_1^2 + y_1^2 + a(x_2^2 + y_2^2).$$

Функция F с гамильтонианом H образуют на \mathcal{P} полный инволютивный набор интегралов системы (1). Согласно теореме Лиувилля—Арнольда, регулярная поверхность уровня первых интегралов представляет собой несвязное объединение двумерных торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Определим интегральное отображение $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $(f, h) = \mathcal{F}(\zeta) = (F(\zeta), H(\zeta))$. Отображение \mathcal{F} принято также называть отображением момента. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображений момента, т.е. точек,

в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется бифуркационной диаграммой.

2. БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА

Для нахождения бифуркационной диаграммы мы используем метод критических подсистем, развитый М. П. Харламовым в интегрируемых задачах динамики твёрдого тела [13]. В качестве приложения приводится анализ устойчивости критических траекторий (т.е. невырожденных особенностей ранга 1 отображения момента) путём определения типа траектории (эллиптический/гиперболический) для каждой кривой из бифуркационного множества.

Определим следующие полиномиальные выражения F_k от фазовых переменных:

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2, \\ F_2 = a(x_2^2 + y_2^2)^2 x_1^4 - (x_2^2 + y_2^2)[(x_2^2 + y_2^2)(a - b) + b] x_2 x_1^3 + (x_2^2 + y_2^2)[(ab - 1)(x_2^2 + y_2^2 - 1) - a] x_1^2 x_2^2 + (x_2^2 + y_2^2)(x_2^2 + y_2^2 + a - b - 1) + b] x_2^3 x_1 - ab(x_2^2 + y_2^2 - 1)x_2^4$$

и обозначим через \mathcal{N} замыкание множества решений системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \tag{4}$$

Тогда справедлива

Теорема 1. Множество \mathcal{C} критических точек отображения момента \mathcal{F} совпадает с множеством решений системы (4). Множество \mathcal{N} является двумерным инвариантным подмногообразием системы (1) с гамильтонианом (2).

Для определения бифуркационной диаграммы Σ удобно перейти к полярным координатам:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \\ x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2.$$

Первое из уравнений системы (4) принимает вид $\sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$, т.е. $\theta_1 - \theta_2 = 0$ и $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. Первая возможность, в отличие от динамики двух вихрей интенсивностей разных знаков [11], не реализуется ни при каких положительных значениях параметров отношения интенсивностей a и b . Для второй возможности, т.е. когда $\theta_1 = \theta_2 + \pi$, второе уравнение системы (4) сводится к уравнению

$$ar_2 r_1^4 + [(a - b)r_2^2 + b]r_1^3 + [(ab - 1)r_2^3 + (1 - ab - a)r_2]r_1^2 - [r_2^4 - (1 - a + b)r_2^2 + b]r_1 + ab(1 - r_2^2)r_2 = 0,$$

параметризация которого имеет вид

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{abt^3 + (a-b-1)t^2 + (a-1+ab)t - b \pm \sqrt{\mathcal{D}}(t+1)}{t[-t^3 + (ab-1)t^2 + (a-b)t + a]}}$$

$$r_2 = t \cdot r_1,$$

где $\mathcal{D} = [abt^2 + (a+1)(1-b)t + b]^2 - 4at^2$.

Соответствующая бифуркационная диаграмма Σ задаётся в виде кривой на плоскости $\mathbb{R}^2(f, h)$:

$$\Sigma : \begin{cases} f = (1 + at^2)r_1^2, \\ h = \ln(1 - r_1^2) + a^2 \ln(1 - t^2r_1^2) - ab \ln[(1 + t)^2r_1^2], \\ r_1^2 = \frac{abt^3 + (a-b-1)t^2 + (a-1+ab)t - b \pm \sqrt{\mathcal{D}}(t+1)}{2t[-t^3 + (ab-1)t^2 + (a-b)t + a]}. \end{cases} \quad (5)$$

В случае вихревой пары положительной интенсивности, т.е. когда параметр отношения интенсивностей a равен единице, бифуркационная диаграмма Σ принимает простой вид и состоит из двух кривых γ_1 и γ_2 , где

$$\begin{aligned} \gamma_1: h &= 2 \ln\left(1 - \frac{f}{2}\right) - b \ln(2f), \quad 0 < f < 2; \\ \gamma_2: \begin{cases} h = \ln\left[\frac{s^2(s-1)}{b+s-1}\right] - b \ln\left[\frac{bs^2}{b+s-1}\right], \\ f = \frac{bs^2 - 2(s-1)(b+s-1)}{b+s-1}, \\ s \in \left(1; \frac{2(1+\sqrt{b})}{2+\sqrt{b}}\right]. \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

Для значений физического параметра $b > 3$ кривая γ_2 имеет точку возврата при $s = \frac{[2-b+\sqrt{b(b-2)}](b-1)}{b-2}$, которая совпадает с точкой касания, когда $b = 3$ и $s = \frac{2(1+\sqrt{b})}{2+\sqrt{b}}$.

Параметризованная кривая (5) также имеет точки возврата, которые удовлетворяют уравнению $P(t) = 0$. Здесь $P(t)$ — многочлен десятой степени, коэффициенты которого зависят от физических параметров a и b . Более того, дискриминант этого многочлена описывает ситуацию, когда точки возврата “сливаются” в одну и одна из ветвей становится гладкой. Такая ситуация наблюдается при бифуркационном анализе динамики взаимодействия двух точечных вихрей в идеальной жидкости внутри цилиндра [15].

В качестве приложения исследуем характер устойчивости критических траекторий, которые лежат в прообразе бифуркационных кривых (5) и (6). При этом достаточно определить тип (эллиптический/гиперболический) в какой-нибудь одной из точек (f, h) гладкой ветви кривой Σ [14].

Тип критической точки x_0 ранга 1 в интегрируемой системе с двумя степенями свободы вычисляется следующим образом. Необходимо указать пер-

вый интеграл F , такой, что $dF(x_0) = 0$ и $dF \neq 0$ в окрестности этой точки. Точка x_0 оказывается неподвижной для гамильтонова поля $\text{sgrad} F$, и можно вычислить линеаризацию этого поля в данной точке — оператор A_F в точке x_0 . Этот оператор будет иметь два нулевых собственных числа, оставшийся сомножитель характеристического многочлена имеет вид $\mu^2 - C_F$, где $C_F = \frac{1}{2} \text{trace}(A_F^2)$. При $C_F < 0$ получим точку типа “центр” (соответствующее периодическое решение имеет эллиптический тип, является устойчивым периодическим решением в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства двумерных регулярных торов), а при $C_F > 0$ получим точку типа “седло” (соответствующее периодическое решение имеет гиперболический тип, существуют движения, асимптотические к этому решению, лежащие на двумерных сепаратрисных поверхностях). Здесь мы предъядвим явные выражения для C_F лишь для бифуркационных кривых γ_1 и γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_1: C_F &= (4-b)f^2 + 4bf - 4b, \quad 0 < f < 2; \\ \gamma_2: C_F &= (b-2)s^2 + 2(b-1)(b-2)s - 2(b-1)^2, \\ s &\in \left(1; \frac{2(1+\sqrt{b})}{2+\sqrt{b}}\right]. \end{aligned}$$

На рис. 1а, б представлены увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы и её возмущения, когда параметр отношения интенсивностей $a = 1$ и $a = 1,06$, при этом параметр $b > 3$. Знаки “+” и “-” соответствуют эллиптическим (устойчивым) и гиперболическим периодическим решениям в фазовом пространстве. Как и следовало ожидать, смена типа происходит в точке возврата A и точке касания B бифуркационной диаграммы Σ .

3. БИФУРКАЦИЯ

$$3\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{T}^2$$

Здесь мы ограничимся положительными интенсивностями. Выполним явное приведение к системе с одной степенью свободы. Для этого в системе (1)

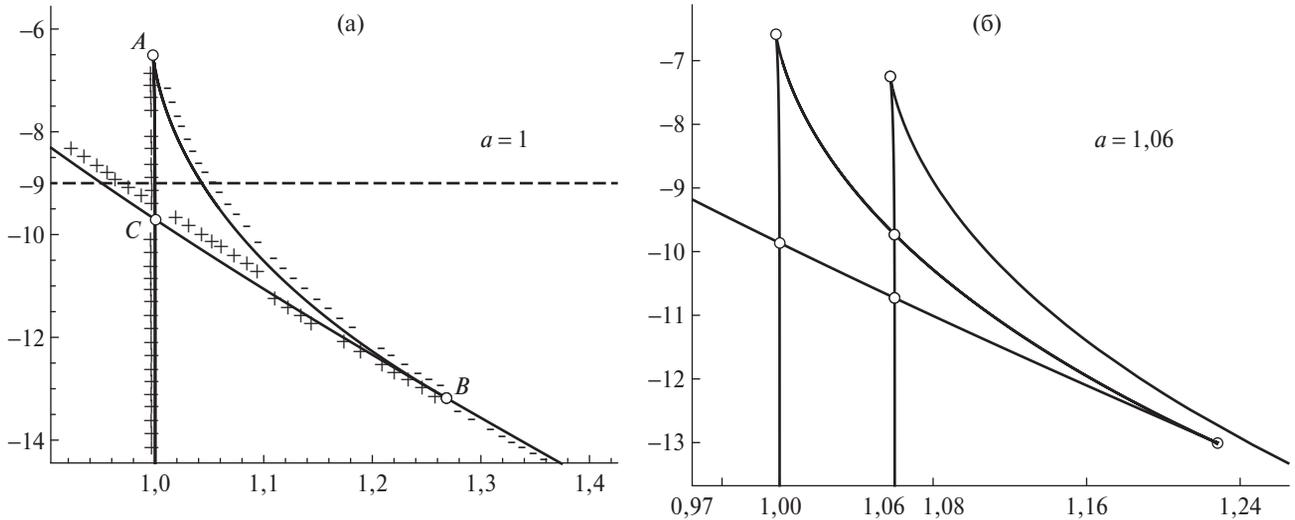


Рис. 1. а — увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы Σ ; б — её возмущение.

с гамильтонианом (2) перейдём от фазовых переменных (x_k, y_k) к новым переменным (u, v, α) по формулам

$$\begin{aligned} x_1 &= u \cos(\alpha) - v \sin(\alpha), & y_1 &= u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha), \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{f - u^2 - v^2} \cos(\alpha), \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{f - u^2 - v^2} \sin(\alpha). \end{aligned}$$

Физические переменные (u, v) представляют собой декартовы координаты одного из вихрей в системе координат, связанной с другим вихрем, вращающейся вокруг центра завихренности. Выбор таких переменных подсказан наличием интеграла момента завихренности $F = \Gamma_1(x_1^2 + y_1^2) + \Gamma_2(x_2^2 + y_2^2)$, который инвариантен относительно группы вращений $SO(2)$. Существование однопараметрической группы симметрии позволяет выполнить редукцию к системе с одной степенью свободы подобно тому, как это делается в механических системах с симметрией [7]. Обратная замена

$$U = \Gamma_1 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad V = \Gamma_1 \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки (3):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = 1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

Система по отношению к новым переменным (u, v) является гамильтоновой

$$\dot{u} = \frac{\partial H_1}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H_1}{\partial u} \tag{7}$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H_1 &= \ln(1 - u^2 - v^2) + a^2 \ln\left(1 - \frac{f}{a} + \frac{u^2 + v^2}{a}\right) - \\ &- ab \ln\left[\frac{f}{a} + \frac{a-1}{a}(u^2 + v^2) - \frac{2}{\sqrt{a}} \sqrt{f - u^2 - v^2} u\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Угол поворота $\alpha(t)$ вращающейся системы координат удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{R(u, v)}{Q(u, v)},$$

где

$$\begin{aligned} R(u, v) &= -2a\{\sqrt{f - u^2 - v^2}[(a^2 - a + b)(u^2 + v^2) + \\ &+ (a - b)f + ab] - \sqrt{au}\{(b - 2a)(u^2 + v^2) + \\ &+ (2a - b)f + ab\}\}, \\ Q(u, v) &= \sqrt{f - u^2 - v^2}\{2\sqrt{au}\sqrt{f - u^2 - v^2} \times \\ &\times (u^2 + v^2 - f + a) - (u^2 + v^2 - f + a) \times \\ &\times [(a - 1)(u^2 + v^2) + f]\}. \end{aligned}$$

Неподвижные точки редуцированной системы (7) определяются критическими точками приведённого гамильтониана (8) и соответствуют относительным равновесиям вихрей в системе (1). Для фиксированного значения интеграла момента завихренности f регулярные уровни приведённого гамильтониана компактны и движения происходят по замкнутым кривым. Можно показать, что критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационную диаграмму (5) и (6). Для участка бифуркационной кривой (AB) , рис. 1 движение на плоскости (u, v) происходит по кривой, которая топологически устроена как $S^1 \cup S^1 \cup S^1$ (рис. 2), а интегральная критическая поверхность представляет собой тривиальное расслоение над S^1 со слоем $S^1 \cup S^1 \cup S^1$.

При переходе через участок кривой (AB) бифуркационной диаграммы Σ при $b > 3$ (рис. 1а) реализуется бифуркация трёх торов в один $3\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{T}^2$. С помощью линий уровней приведённого гамильтониана на рис. 3 наглядно продемонстрирована указанная бифуркация. Если рассмотреть интегрируемое возмущение по параметру отношения интенсивностей a , то указанная критическая интегральная поверхность оказалась неустойчивой и распалась на два несвязных критических интегральных многообразия $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1) \cup \mathbb{T}^2$ и $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1)$. Этот факт также подтверждается

работой [9]. Для наглядности на рис. 4а, б приведены абсолютные движения вихрей на плоскости и в виде обмотки тора в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3(x_1, y_1, x_2)$ для следующих начальных данных $u_0 = -0,37872$; $v_0 = 0$; $\alpha_0 = 0$; $h = -9$; $f = 1,03$.

После разбиения фазового пространства на области, в которых количество торов остаётся неизменным, явного определения бифуркационной диаграммы и самих бифуркаций можно сформулировать задачу классификации абсолютных движений вихрей, а также определения топологического типа трёхмерных изоэнергетических многообразий.

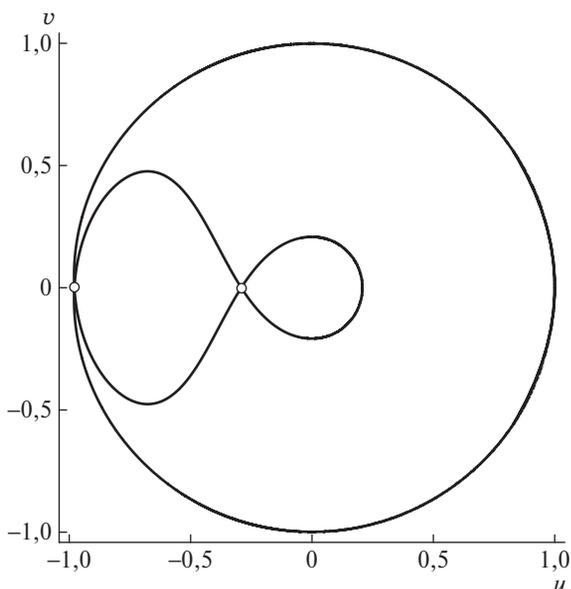
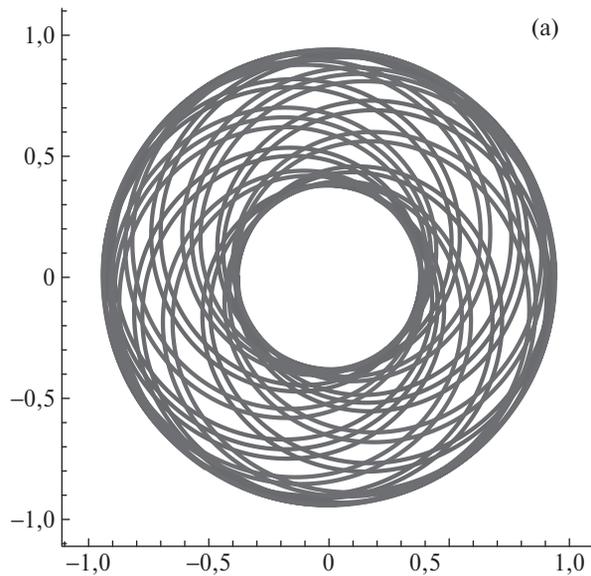


Рис. 2. Топологическая кривая $\mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1 \dot{\cup} \mathbb{S}^1$.



(а)

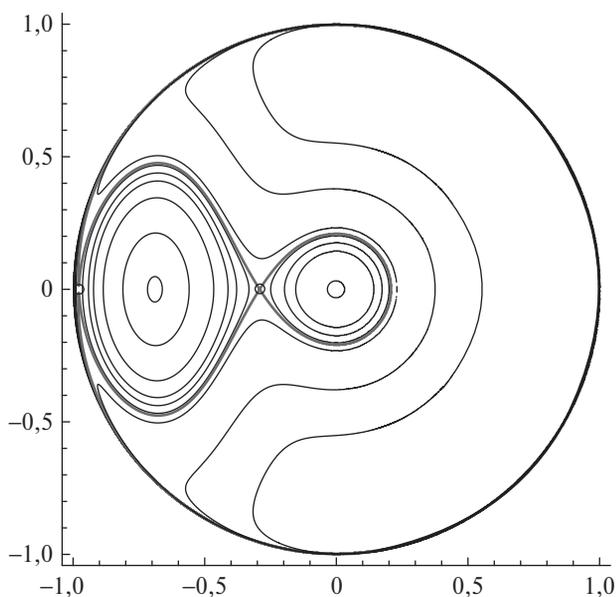
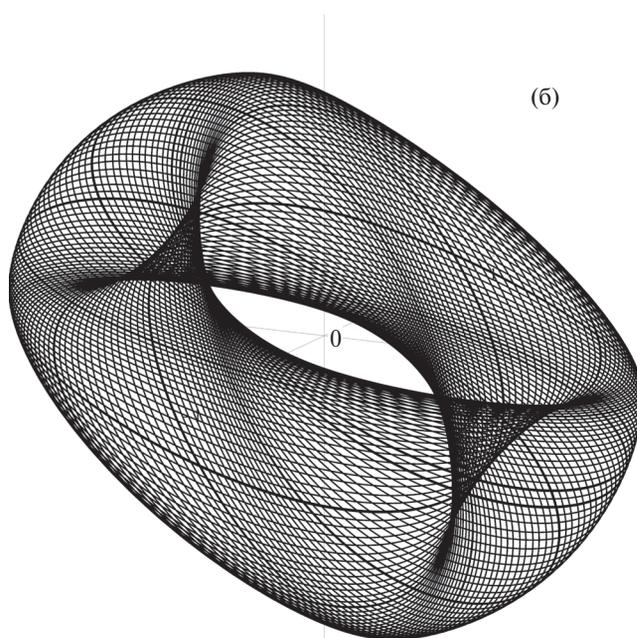


Рис. 3. Линии уровня приведённого гамильтониана H_1 для $a = 1$ и $b > 3$.



(б)

Рис. 4. Абсолютные движения вихрей: а — на плоскости; б — в виде обмотки тора в пространстве $\mathbb{R}^3(x_1, y_1, x_2)$.

Благодарности. Автор выражает благодарность А.В. Борисову за плодотворные обсуждения и ценные советы, касающиеся содержания работы.

Источники финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (1.2404.2017/4.6), а также при поддержке грантов РФФИ № 16–01–00170 и 17–01–00846.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fetter A.L.* Rotating Trapped Bose-Einstein Condensates // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 81. № 2. P. 647–691.
2. *Torres P.J., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D.S.* Dynamics of Vortex Dipoles in Confined Bose–Einstein Condensates // *Phys. Lett. A.* 2011. V. 375. P. 3044–3050.
3. *Borisov A.V., Kilin A.A.* Stability of Thomson’s Configurations of Vortices on a Sphere // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2000. V. 5. № 2. P. 189–200.
4. *Borisov A.V., Mamaev I.S., Kilin A.A.* Absolute and Relative Choreographies in the Problem of Point Vortices Moving on a Plane // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2004. V. 9. № 2. P. 101–111.
5. *Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S.* The Dynamics of Vortex Rings: Leapfrogging, Choreographies and the Stability Problem // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2013. V. 18. № 1/2. P. 33–62.
6. *Borisov A.V., Ryabov P.E., Sokolov S.V.* Bifurcation Analysis of the Motion of a Cylinder and a Point Vortex in an Ideal Fluid // *Math. Notes.* 2016. V. 99. № 6. P. 834–839.
7. *Харламов М.П.* Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 200 с.
8. *Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // *УМН.* 1990. Т. 45. В. 2 (272). С. 49–77.
9. *Ошемков А.А., Тужилин М.А.* Интегрируемые возмущения седловых особенностей ранга 0 гамильтоновых систем // *Мат. сб.* 2018. Т. 209. № 9. С. 102–127.
10. *Navarro R., Carretero-González R., Torres P.J., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Ray M.W., Altuntaş E., Hall D.S.* Dynamics of Few Co-Rotating Vortices in Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. № 22. P. 225301-6.
11. *Sokolov S.V., Ryabov P.E.* Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose-Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2017. V. 22. № 8. P. 979–998.
12. *Соколов С.В., Рябов П.Е.* // *ДАН.* 2018. Т. 97. № 6. С. 652–656.
13. *Kharlamov M.P.* Extensions of the Appelrot Classes for the Generalized Gyrostat in a Double Force Field // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2014. V. 19. № 2. P. 226–244.
14. *Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Топология и устойчивость интегрируемых систем // *УМН.* 2010. Т. 65. В. 2. С. 71–132.
15. *Килин А.А., Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика точечных вихрей внутри и вне круговой области. В сб.: *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей.* М.; Ижевск: ИКИ, 2003. 704 с.

BIFURCATIONS OF LIOUVILLE TORI IN A SYSTEM OF TWO VORTICES OF POSITIVE INTENSITY IN A BOSE–EINSTEIN CONDENSATE

P. E. Ryabov

*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation
Institute of Machines Science named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation
Udmurt State University, Izhevsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov December 12, 2018

Received December 13, 2018

In this paper we consider a completely Liouville integrable Hamiltonian system with two degrees of freedom, which describes the dynamics of two vortex filaments in a Bose–Einstein condensate enclosed in a harmonic trap. For vortex pairs of positive intensity detected bifurcation of three Liouville tori into one. Such bifurcation was found in the integrable case of Goryachev–Chaplygin–Sretensky in the dynamics of a rigid body. For the integrable perturbation of the physical parameter of the intensity ratio, identified bifurcation proved to be unstable, which led to bifurcations of the type of two tori into one and vice versa.

Keywords: completely integrable Hamiltonian systems, bifurcation diagram of momentum mapping, bifurcations of Liouville tori, dynamics of vortices, Bose–Einstein condensate.