УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЁННЫХ ДИСЛОКАЦИЙ НА ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЁННЫМ СЛОЕМ ПРИ НАЛОЖЕНИИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В. А. Левин^{1,*}, Л. М. Зубов², К. М. Зингерман³

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 18.12.2018 г.

Поступило 29.12.2018 г.

Для случая наложения больших деформаций предложена постановка задач о равновесии нелинейно-упругого тела с непрерывно распределёнными дислокациями. Приведены числовые результаты, показывающие влияние распределённых дислокаций на напряжённо-деформированное состояние бруса.

Ключевые слова: наложение больших деформаций, нелинейная упругость, распределённые дислокации, изгиб бруса, предварительно напряжённый слой, аналитическое решение.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524856686-690>

В сообщении предложена для случая наложения больших деформаций [1–6] постановка задач о равновесии нелинейно-упругого тела с непрерывно распределёнными дислокациями. Эти задачи представляют интерес при моделировании процесса накопления повреждений в нагруженном теле [6]. Для полулинейного материала в сообщении получено точное аналитическое решение задачи об изгибе составного бруса с предварительно деформированным слоем при возникновении в бруске непрерывно распределённых дислокаций на основе метода, предложенного в [7].

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАТИКИ УПРУГОГО ТЕЛА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Деформация окрестности данной частицы материального тела полностью определяется неособенным тензором $\mathbf{F} = \overset{0}{\nabla} \mathbf{R}$, называемым градиентом деформации. Здесь $\mathbf{R}$ — вектор положения частицы в текущем (деформированном) состоянии, $\overset{0}{\nabla}$ — оператор градиента в координатах начального состояния. Градиент деформации, очевидно, удовлетворяет уравнению совместности

$$\overset{0}{\nabla} \times \mathbf{F} = 0. \quad (1)$$

Здесь знак $\times$ — векторное произведение.

Хорошо известно, что уравнение (1) есть необходимое и достаточное условие разрешимости задачи об определении радиуса-вектора $\mathbf{R}$ частицы в деформированном состоянии упругого тела по заданному тензорному полю $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = x_s \mathbf{i}_s$, $\mathbf{i}_k$ — координатные орты, x_k — декартовы координаты отсчётной конфигурации.

Если в теле непрерывным образом распределены трансляционные дислокации, то согласно классической континуальной теории дислокаций [8–10] уравнение (1) заменяется уравнением несовместности

$$\overset{0}{\nabla} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})$ — тензорное поле плотности дислокаций, которое должно удовлетворять требованию солёности

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0. \quad (3)$$

Здесь точка означает скалярную свёртку. Физический смысл тензора плотности дислокаций заключается в том [9], что поток тензорного поля $\boldsymbol{\alpha}$ через любую поверхность даёт суммарный вектор Бюргерса дислокаций, пересекающих эту поверхность. При $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ векторное поле $\mathbf{R}(\mathbf{r})$ положений частиц тела в деформированном состоянии не существует, т.е. не существует вектора, градиент которого равен $\mathbf{F}$. Поэтому при наличии непрерывно распределённых дислокаций тензор $\mathbf{F}$ называют тензором дисторсии.

Для определения напряжённо-деформированного состояния нелинейно упругого тела к уравне-

¹ Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

² Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

³ Тверской государственный университет

*E-mail: v.a.levin@mail.ru

нию несовместности (2), в котором тензорное поле α считается заданным, следует присоединить уравнения равновесия для напряжений

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (4)$$

и определяющие соотношения упругого материала

$$\mathbf{D}(\mathbf{F}) = \frac{dW(\mathbf{F})}{d\mathbf{F}}. \quad (5)$$

В (4), (5) $\mathbf{D}$ — несимметричный тензор напряжений Пиолы, W — удельная энергия деформации. Действие массовых сил не учитывается.

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ СОСТАВНОГО БРУСА С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ КРАЕВЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

Постановка задачи на основе теории наложения больших деформаций следующая [2–4]. Нижний слой бруса испытывает предварительную деформацию и переходит из начального в промежуточное состояние. В этом состоянии он соединяется с другим (недеформированным) слоем. Далее составной брус деформируется как единое целое. К брусу прикладывается изгибающий момент, в нём возникает поле распределённых дислокаций. Происходит изгиб бруса, и он переходит в конечное состояние.

Рассмотрим плоскую деформацию чистого изгиба прямоугольного бруса, занимающего в промежуточном состоянии область $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq h$. Область $0 \leq y \leq h_1$ ($0 \leq h_1 \leq h$) занята предварительно напряжённым слоем. Предварительная деформация этого слоя относительно естественного, ненапряжённого состояния материала однородна и задаётся следующим тензором дисторсии:

$$\mathbf{F}_{0,1} = \alpha \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \gamma \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (6)$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ — координатные орты в плоскости бруса, $\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$, α, γ — постоянные.

Тензорное поле дисторсии при нелинейном плоском изгибе имеет представление [2–4, 7, 11]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_1(y) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + F_2(y) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \quad (7) \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \beta x - \mathbf{i}_2 \sin \beta x, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{i}_1 \sin \beta x + \mathbf{i}_2 \cos \beta x, \\ \beta &= \text{const.} \end{aligned}$$

Тензор плотности дислокаций примем в виде [7]

$$\alpha = \tau(y) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{e}_1. \quad (8)$$

Выражение (8) описывает распределение краевых дислокаций со скалярной плоскостью $\tau(y)$. Линии этих дислокаций перпендикулярны плоскости бруса, а вектор Бюргера каждой дислокации направлен

вдоль орта $\mathbf{e}_1$. Нетрудно понять, что тензорное поле (8) удовлетворяет условию соленидальности (3) при любой функции $\tau(y)$.

Тензорное уравнение несовместности (2) в силу (7), (8) становится эквивалентным одному скалярному дифференциальному уравнению

$$\beta F_2 - \frac{dF_1}{dy} = \tau(y). \quad (9)$$

Определяющее соотношение (5) в случае изотропного упругого тела можно представить в следующей форме:

$$\mathbf{D}(\mathbf{F}) = a_0 \mathbf{F} + a_1 \mathbf{G} \cdot \mathbf{F} + a_2 \mathbf{F}^{-T}, \quad (10)$$

$$a_k = a_k(I_1, I_2, I_3), \quad \mathbf{G} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T,$$

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{G}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 \mathbf{G} - \text{tr} \mathbf{G}^2), \quad I_3 = \det \mathbf{G}.$$

Здесь $\mathbf{G}$ — мера деформации Коши, I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора $\mathbf{G}$, $a_k, k = 0, 1, 2$, — функции этих инвариантов. В рассматриваемой задаче изгиба согласно (7) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= F_1^2 \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + F_2^2 \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3, \\ I_1 &= F_1^2 + F_2^2 + 1, \quad I_2 = (F_1 F_2)^2 + F_1^2 + F_2^2, \quad (11) \\ I_3 &= (F_1 F_2)^2. \end{aligned}$$

Из (7), (10), (11) вытекает, что для произвольного изотропного материала тензор напряжения Пиолы имеет в задаче изгиба выражение

$$\mathbf{D} = D_1(y) \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + D_2(y) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + D_3(y) \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3. \quad (12)$$

В силу (12) векторное уравнение равновесия (4) сводится к одному скалярному уравнению

$$\frac{dD_2}{dy} = \beta D_1. \quad (13)$$

Поскольку величины D_1 и D_2 при помощи определяющих соотношений (10) выражаются через F_1 и F_2 , видно, что система уравнений (9), (13) сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $F_1(y)$. Как будет показано, в случае полупериодического (гармонического) материала это уравнение допускает точное решение.

Если определяющее соотношение упругого материала относительно естественного (ненапряжённого) состояния имеет вид

$$\mathbf{D} = \Phi(\mathbf{F}), \quad (14)$$

то тензор напряжений Пиолы относительно предварительно напряжённого (промежуточного) состояния выражается так:

$$\mathbf{D}' = (\det \mathbf{F}_{0,1})^{-1} \mathbf{F}_{0,1}^T \cdot \Phi(\mathbf{F}_{0,1} \cdot \mathbf{F}_{1,2}). \quad (15)$$

При помощи (6), (10) и (15) для заданной модели материала находятся выражения компонент напряжений D'_1, D'_2, D'_3 в предварительно деформированном слое бруса, т.е. при $0 \leq y \leq h_1$.

ПОЛУЛИНЕЙНЫЙ МАТЕРИАЛ

В случае полулинейного материала определяющее соотношение для верхней части бруса $h_1 \leq y \leq h$ имеет вид (μ, ν — материальные постоянные)

$$\Phi(\mathbf{F}) = \frac{2\mu}{1-2\nu}(\nu \operatorname{tr} \mathbf{U} - 1 - \nu)\mathbf{A} + 2\mu\mathbf{F}, \quad (16)$$

$$\mathbf{U} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^{1/2}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}.$$

В дальнейшем рассматривается случай, когда компоненты дисторсии в выражении (7) положительны, т.е. $F_1 > 0, F_2 > 0$. Тогда на основании (7), (12), (16) в области $h_1 < y \leq h$ получаем

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2\mu}{1-2\nu}[(1-\nu)F_1 + \nu F_2 - 1], \\ D_2 &= \frac{2\mu}{1-2\nu}[\nu F_1 + (1-\nu)F_2 - 1], \end{aligned} \quad (17)$$

$$h_1 \leq y \leq h.$$

Для нижней части бруса, в которой дисторсия отсчитывается от промежуточной конфигурации, в силу (6), (15), (16) имеем (штрихом помечены материальные постоянные нижнего слоя)

$$\begin{aligned} D'_1 &= \frac{2\mu'}{1-2\nu'}[(1-\nu')\alpha\gamma^{-1}F_1 + \nu'F_2 - \gamma^{-1}], \\ D'_2 &= \frac{2\mu'}{1-2\nu'}[\nu'F_1 + (1-\nu')\alpha^{-1}\gamma F_2 - \alpha^{-1}], \end{aligned} \quad (18)$$

$$0 \leq y < h_1.$$

Вместо (17), (18) в дальнейшем более удобными будут обратные соотношения

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 + (2\mu)^{-1}[(1-\nu)D_1 - \nu D_2], \\ F_2 &= 1 + (2\mu)^{-1}[-\nu D_1 + (1-\nu)D_2], \end{aligned} \quad (19)$$

$$h_1 < y \leq h;$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha^{-1} + (2\mu')^{-1}[(1-\nu')\alpha^{-1}\gamma D'_1 - \nu' D'_2], \\ F_2 &= \gamma^{-1} + (2\mu')^{-1}[-\nu' D'_1 + (1-\nu')\alpha\gamma^{-1} D'_2], \end{aligned} \quad (20)$$

$$0 \leq y < h_1.$$

Соотношения (9), (13), (19), (20) приводят к следующим уравнениям для второй компоненты тензора Пиолы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 D_2}{dy^2} - \beta^2 D_2 &= \frac{2\mu\beta}{1-\nu}[\beta - \tau(y)], \quad h_1 < y \leq h, \\ \frac{d^2 D'_2}{dy^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2}{\gamma^2} D'_2 &= \frac{2\mu'\alpha\beta}{(1-\nu')\gamma} \left[\frac{\beta}{\gamma} - \tau(y) \right], \quad 0 \leq y < h_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Граничные условия для этой системы уравнений следующие:

$$\begin{aligned} D_2(h) &= 0, \quad D'_2(0) = 0, \quad D_2(h_1) = D'_2(h_1), \\ F_1(h_1 - 0) &= F_1(h_1 + 0). \end{aligned} \quad (22)$$

Решение краевой задачи (21), (22) можно найти в явном виде методом вариации произвольных постоянных для любой функции $\tau(y)$.

При отсутствии дислокаций, т.е. при $\tau(y) \equiv 0$, уравнение несовместности (9) примет вид

$$\frac{dF_1}{dy} = \beta F_2$$

и имеет следующее решение

$$F_1 = \beta \rho(y), \quad F_2 = \frac{d\rho(y)}{dy}.$$

При $\tau \neq 0$, т.е. при наличии распределённых дислокаций, функция $\rho(y)$ не существует, поэтому вычисление изгибающего момента по формуле [2, 3]

$$M(\beta) = \int_0^{h_1} D'_1 \rho dy + \int_{h_1}^h D_1 \rho dy$$

становится невозможным. Для бруса с дислокациями следует использовать энергетическое определение изгибающего момента

$$\begin{aligned} M(\beta) &= \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}, \\ \Pi(\beta) &= \int_0^{h_1} W'(y, \beta) dy + \int_{h_1}^h W(y, \beta) dy, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\Pi(\beta)$ — погонная энергия бруса, вычисленная при решении краевой задачи (21), (22). Эквивалентность энергетического и обычного определения изгибающего момента доказана ранее [12] не только для плоского, но и для пространственного изгиба призматического стержня.

Исходя из выражения упругого потенциала полулинейного материала

$$W = \frac{\mu\nu}{1-2\nu} \operatorname{tr}^2(\mathbf{U} - \mathbf{E}) + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{U} - \mathbf{E})^2$$

и учитывая (7), получим

$$\begin{aligned} W' &= \frac{1}{\alpha\gamma} \left[\frac{\mu'\nu'}{1-2\nu'} (\alpha F_1 + \gamma F_2 - 2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \mu'(\alpha F_1 - 1)^2 + \mu'(\gamma F_2 - 1)^2 \right], \end{aligned} \quad (24)$$

$$W = \frac{\mu\nu}{1-2\nu} (F_1 + F_2 - 2)^2 + \mu(F_1 - 1)^2 + \mu(F_2 - 1)^2.$$

Рис. 1. Зависимости изгибающего момента от β при $\alpha = 2/3$ (а) и $3/2$ (б).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

Расчёты были выполнены при следующих значениях параметров: $\mu = 3\mu'$, $\nu' = 0,35$, $\nu = 0,25$, $h = 2,5h_1$. Плотность дислокаций считалась постоянной величиной τ во всём составном брусе. Результаты расчётов приведены на рис. 1 для разных значений кратности начального удлинения α . Показаны зависимости изгибающего момента от параметра кривизны бруса β для разных значений плотности дислокаций τ , указанных под рисунком.

Источник финансирования. Работы выполнены при финансовой поддержке государства в лице Минобрнауки России (Соглашение № 14.610.21.0013, идентификатор проекта RFMEFI61017X0013).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин В.А. Многократное наложение больших деформаций в упругих и вязкоупругих телах. М.: Наука/Физматлит, 1999. 224 с.
2. Левин В.А., Zubov Л.М., Zingerman К.М. // ДАН. 2015. Т. 460. № 2. С. 155–158.
3. Левин В.А., Zubov Л.М., Zingerman К.М. // ДАН. 2015. Т. 461. № 4. С. 410–413.
4. Levin V.A., Zubov L.M., Zingerman K.M. // Int. J. Solids Structures. 2014. V. 51. № 6. P. 1403–1409.
5. Levin V.A. // Int. J. Solids Structures. 1998. V. 35. № 20. P. 2585–2600.
6. Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2015. Т. I–III.
7. Зеленина А.А., Zubov Л.М. // ДАН. 2013. Т. 451. № 5. С. 516–519.
8. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
9. Nye J.F. // Acta metal. 1953. V. 1. P. 153–162.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
11. Зеленина А.А., Zubov Л.М. // ПММ. 2000. Т. 64. В. 3. С. 416–423.
12. Zubov Л.М. // ПММ. 2004. Т. 68. В. 3. С. 507–515.

THE EFFECT OF DISTRIBUTED DISLOCATIONS ON BENDING OF A RECTANGULAR BEAM WITH A PRELIMINARILY STRESSED LAYER UNDER SUPERPOSITION OF LARGE STRAINS

V. A. Levin¹, L. M. Zubov², K. M. Zingerman³

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

³*Tver State University, Tver, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov December 18, 2018

Received December 29, 2018

The formulation of problems on the equilibrium of a nonlinearly elastic solid with continuously distributed dislocations is proposed for the case of superposition of large strains. The numerical results showing the effect of distributed dislocations on the stress—strain state of the beam are presented.

Keywords: superposition of large strains, nonlinear elasticity, distributed dislocations, bending of a beam, prestressed layer, analytical solution.