ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 4, с. 411–415

МАТЕМАТИКА

УДК 517.545+517.962.2+519.173

ДИСКРЕТНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ЗЕЙФЕРТА НАД ГРАФАМИ И ИХ СЛОЖНОСТЬ

Йонг Су Квон[1], А. Д. Медных[2,3,*], И. А. Медных[2,3]

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 21.12.2018 г.

Поступило 10.01.2019 г.

В настоящей работе мы рассматриваем бесконечное семейство графов $H_n = H_n(G_1, G_2, ..., G_m)$, представляющих из себя дискретные расслоения Зейферта над заданным графом H на m вершинах с особыми слоями $G_1, G_2, ..., G_m$. Каждый слой $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, ..., s_{i,k_i})$ такого расслоения является циркулянтным графом на n вершинах со скачками $s_{i,1}, s_{i,2}, ..., s_{i,k_i}$. Семейство дискретных расслоений Зейферта достаточно обширно. Оно включает обобщённые графы Петерсена, I-графы, Y-графы, H-графы, сандвичи циркулянтных графов, дискретные торы и др. В работе получены формулы для числа порождающих деревьев $\tau(n)$ графа H_n в терминах полиномов Чебышева, изучены аналитические и арифметические свойства этой функции и найдена её асимптотика при $n \to \infty$.

Ключевые слова: сложность графа, циркулянтный граф, циклическое накрытие, остовное дерево, спектр граф.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524864411-415

Сложность $\tau = \tau(G)$, или число порождающих деревьев связного конечного графа G, является его важным инвариантом. Различные подходы к вычислению сложности даны в работах [1–3]. В случае, когда рассматривается бесконечное семейство графов $G_n, n \in \mathbb{N}$, указанное число задаёт функцию сложности семейства $\tau(n) = \tau(G_n)$. Во многих ситуациях, в частности в статистической физике [4–7], важно знать поведение функции $\tau(n)$ при достаточно больших значениях n.

Цель данного сообщения — изучить аналитические и арифметические свойства функции сложности дискретных расслоений Зейферта H_n и найти её асимптотику.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим конечный, связный граф G, допускающий кратные рёбра, но не имеющий петель. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно множество вершин и рёбер графа G. Матрица $A = A(G) = \{a_{u,v}\}_{u,v \in V(G)}$, где a_{uv} — число рёбер между u и v, называется матрицей смежности графа G. Обозначим через d_v валентность вершины $v \in V(G)$ и рассмотрим диагональную матрицу $D = D(G)$ с элементами $d_{vv} = d_v$. Матрица $L = L(G) = D(G) - A(G)$ называется матрицей Лапласа или лапласианом графа G. Пусть $X = \{x_v, v \in V(G)\}$ — множество независимых переменных, а $D(X) = \mathrm{diag}\{x_v, v \in V(G)\}$ — образованная ими диагональная матрица. Обобщённым лапласианом графа G назовём матрицу $L(G, X) = D(X) - A(G)$. В частном случае $x_v = d_v$ имеем $L(G, X) = L(G)$.

Порождающим или остовным деревом графа G называется связный подграф, не имеющий циклов и содержащий все вершины графа. Сложностью $\tau = \tau(G)$ графа G называется число его порождающих деревьев. Классическая теорема Кирхгоффа утверждает, что $\tau(G)$ равно произведению всех ненулевых собственных значений лапласиана $L(G)$, поделённому на число вершин графа G.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_k$ — целые числа, такие, что $1 \le s_1 < s_2 < \ldots < s_k \le \dfrac{n}{2}$. Циркулянтным графом

[1]*Yeungnam University, Republic Korea*

[2]*Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск*

[3]*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет*

**E-mail: smedn@mail.ru*

$C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ на n вершинах $0, 1, \ldots, n-1$ называется граф, у которого вершина i, $0 \le i \le n-1$ смежна вершинам $i \pm s_1, i \pm s_2, \ldots, i \pm s_k \pmod n$. Все вершины графа имеют чётную валентность $2k$. При $s_k = \frac{n}{2}$ граф имеет кратные рёбра.

Пусть H — связный конечный граф на вершинах $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Припишем каждой вершине v_i циркулянтный граф $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$. Дискретным расслоением Зейферта $H_n = H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ над H со слоями $G_1, G_2, \ldots, G_m$ называется граф с вершинами $\{(k, v_i),\ k = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$. При этом вершины (k, v_i) и (k, v_j) соединены ребром, если v_i и v_j соединены ребром в H, а при фиксированном i вершины (k, v_i), $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют граф $C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$, в котором (k, v_i) смежна вершинам $(k \pm s_{i,1}, v_i), (k \pm s_{i,2}, v_i), \ldots, (k \pm s_{i,k_i}, v_i), \pmod n$. Частные случаи этой конструкции, а именно обобщенные графы Петерсена, I-графы, Y-графы, H-графы, дискретные торы и сандвичи циркулянтных графов изучены в работах [7–12].

2. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛА ПОРОЖДАЮЩИХ ДЕРЕВЬЕВ

Пусть $H_n = H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ — дискретное расслоение Зейферта над графом H со слоями $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i}), i = 1, 2, \ldots, m.$ Обозначим через d_i валентность i-й вершины графа H. Рассмотрим обобщённый лапласиан $L(H, X)$ графа H от переменных $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, где $x_i = 2s_{i,k_i} + d_i - \sum_{p=1}^{k_i} 2T_{s_{i,p}}(w)$, а $T_s(w)$ — полином Чебышева первого рода. Положим $Q(w) = \det(L(H, W))$. Отметим, что $Q(w)$ — полином степени $s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \ldots + s_{m,k_m}$ с целочисленными коэффициентами.

Следующая лемма устанавливается прямыми вычислениями.

Л е м м а 1. *Старший член полинома $Q(w)$ равен $(-1)^m \cdot 2^s$, где $s = \sum_{i=1}^{m} s_{i,k_i}$. Кроме того, $Q(1) = 0, Q'(1) = -2q\tau(H) \ne 0$, где $q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} s_{i,j}^2$, а $\tau(H)$ — число порождающих деревьев в графе H.*

Основной результат данной секции составляет следующая

Т е о р е м а 1. *Число порождающих деревьев в графе $H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ даётся формулой*

$$\tau(n) = \frac{n\tau(H)}{q}\prod_{p=1}^{s-1} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \ldots + s_{m,k_m}$, w_p, $p = 1, 2, \ldots, s-1$, — все отличные от единицы корни алгебраического уравнения $Q(w) = 0$. При этом $\tau(H)$ — число порождающих деревьев в графе H, $q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i} s_{i,j}^2$, а $T_n(w)$ — полином Чебышева первого рода.

Наметим доказательство теоремы 1. Используя аргументы из доказательства теоремы 1 из [10], имеем

$$\tau(n) = (-1)^{(m+s)(n-1)} n\tau(H)\prod_{j=1}^{s-1}\frac{T_n(w_j) - 1}{w_j - 1}. \tag{1}$$

Полученная формула позволяет установить полезное следствие.

Л е м м а 2. *Число порождающих деревьев $\tau(n)$ кратно $n\tau(H)$.*

Для доказательства леммы достаточно заметить, что произведение в правой части формулы (1) равно результанту двух целочисленных полиномов

$$f(\zeta) = \frac{2T_n\left(\frac{\zeta + 2}{2}\right) - 2}{\zeta} \quad \text{и} \quad g(\zeta) = \frac{1}{\zeta} Q\left(\frac{\zeta + 2}{2}\right), g(0) \ne 0$$

и, следовательно, является целым числом.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся равенством

$$\tau(n) = \frac{n\tau(H)\prod_{j=1}^{s-1}|T_n(w_j) - 1|}{\prod_{j=1}^{s-1}|w_j - 1|}.$$

По лемме 1 многочлен $Q(w)$ имеет старший коэффициент $a_0 = (-1)^m \cdot 2^s$. При этом $Q(1) = 0$, $Q'(1) = -2q$ и $\prod_{j=1}^{s-1}|w_j - 1| = |\frac{1}{a_0}Q'(1)| = \frac{q}{2^{s-1}}$.

Используя полученные равенства, завершим доказательство.

3. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ СЛОЖНОСТИ И ЕЁ АСИМПТОТИКА

В серии предыдущих работ авторов [9–11] было замечено, что для многих семейств графов число порождающих деревьев даётся формулой

$\tau(n) = pna(n)^2$, где $a(n)$ — некоторая целочисленная последовательность, а p — предписанная константа, зависящая от чётности n. Цель настоящего раздела — установить этот факт для дискретных расслоений Зейферта.

Напомним, что каждое целое положительные число p однозначно представляется в виде $p = qr^2$, где p и q — целые числа, а q — свободно от квадратов. Мы будем называть q свободной от квадратов частью числа p.

Теорема 2. *Пусть число $\tau(H)$ — число порождающих деревьев графа H, а q — свободная от квадратов часть числа $Q(-1)$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что*

1) $\tau(n) = n\tau(H)a(n)^2$, *если n нечётно*,

2) $\tau(n) = n\tau(H)qa(n)^2$, *если n чётно*.

Из общих свойств циклических накрытий [13] следует, что спектр оператора Лапласа графа H_n распадается на n групп $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \ldots, \lambda_{m,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, в каждой из которых выполнено равенство $\lambda_{1,j}\lambda_{2,j}\ldots\lambda_{m,j} = P(\varepsilon_n^j)$, где $\varepsilon_n = e^{2\pi i/n}$, а $P(z) = Q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$. По формуле (12) из [13] имеем $n\tau(n) = \tau(H)\prod_{j=1}^{n-1}\lambda_{1,j}\lambda_{2,j}\ldots\lambda_{m,j}$. Отметим, что $P(\varepsilon_n^j) = P(\varepsilon_n^{n-j})$. Определим $c(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}\lambda_{1,j}\lambda_{2,j}\ldots\lambda_{m,j}$, если n нечётно и $d(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}\lambda_{1,j}\lambda_{2,j}\ldots\lambda_{m,j}$, если n чётно. Следуя [14], заметим, что каждое алгебраическое число $\lambda_{i,j}$ входит в указанные произведения вместе со всеми своими галуа-сопряжёнными элементами. Поэтому $c(n)$ и $d(n)$ — целые числа. Более того, если n — чётное, мы имеем $\lambda_{1,\frac{n}{2}}\lambda_{2,\frac{n}{2}}\ldots\lambda_{m,\frac{n}{2}} = P(-1) = Q(-1)$. Ниже (см. замечание 1) будет показано, что это число всегда целое.

Таким образом, получим $n\tau(n) = \tau(H)c(n)^2$, если n — нечётно, и $n\tau(n) = \tau(H)Q(-1)d(n)^2$, если n — чётно. Пусть $Q(-1) = pr^2$, где p — свободно от квадратов. Тогда

1) $\frac{\tau(n)}{n\tau(H)} = \left(\frac{c(n)}{n}\right)^2$, если n нечётно;

2) $\frac{\tau(n)}{n\tau(H)} = p\left(\frac{rd(n)}{n}\right)^2$, если n чётно.

По лемме 2 отношение $\frac{\tau(n)}{n\tau(H)}$ — целое число. Отсюда величины под квадратами в 1) и 2) также целые числа. Полагая $a(n) = \frac{c(n)}{n}$ в первом случае и $a(n) = \frac{rd(n)}{n}$ — во втором, завершим доказательство теоремы.

Замечание 1. Обозначим через t_i количество нечётных чисел в последовательности $s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i}$. Тогда $Q(-1) = \det L(H, W)$, где $W = (d_1 + 4t_1, d_2 + 4t_2, \ldots, d_m + 4t_m)$. Действительно, $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, где $w_i = 2k_i + d_i - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w)$. Поскольку $T_s(-1) = (-1)^s$, имеем $w_i = d_i + 4\sum_{j=1}^{k_i}\frac{1-(-1)^{s_{i,j}}}{2} = d_i + 4t_i$.

Используя технику, разработанную авторами в [9, 11, 13], имеем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\gcd(s_{i,p}, i = 1, 2, \ldots, m, p = 1, 2, \ldots, k_i) = 1$. *Тогда число порождающих деревьев $\tau(n)$ в графе H_n имеет следующую асимптотику*

$$\tau(n) \sim \frac{n}{q}A^n,\ n \to \infty,$$

где $q = \sum_{i=1}^{m}\sum_{p=1}^{k_i} s_{i,p}^2$ и $A = \exp\left(\int_0^1 \log|Q(\cos 2\pi t)|\,dt\right)$.

4. ПРИМЕРЫ

Отметим, что все приведённые выше теоремы сформулированы в терминах полинома $Q(w)$. В следующих примерах указанный полином описывается явным образом.

1. Циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Рассмотрим классический циркулянтный граф $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ как расслоение $H_n(G)$ над одноточечным графом $H = \{v_1\}$ со слоем G. В этом случае $d_1 = 0$, $L(H, X) = (x_1)$ и $Q(w) = 2k - \sum_{p=1}^{k} 2T_{s_p}(w)$. Утверждения, соответствующие установленным выше теоремам, для этого случая получены ранее в работе [10].

2. Обобщённый граф Петерсена $GP(n,k)$ и I-граф $I(n,k,l)$. Пусть H — линейный граф на двух вершинах $G_1 = C_n(k)$ и $G_2 = C_n(l)$. Тогда $I(n,k,l) = H_n(G_1, G_2)$ и $GP(n,k) = I(n,k,1)$. При этом $Q(w) = (3 - 2T_k(w))(3 - 2T_l(w)) - 1$. Сложность графов

$GP(n,k)$ и $I(n,k,l)$ исследована в работах [9] и [11] соответственно.

3. Сэндвич из m циркулянтных графов. Рассмотрим линейный граф H на m вершинах. Тогда $H_n(G_1, G_2, \ldots, G_m)$ представляет сэндвич из циркулянтных графов $G_1, G_2, \ldots, G_m$. Здесь $d_1 = d_m = 1$ и $d_i = 2, i = 2, \ldots, m-1$. Положим

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \\ = \det\begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & x_m \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями устанавливается, что имеет место рекуррентное соотношение

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 D(x_2, \ldots, x_m) - D(x_3, \ldots, x_m)$$

с начальными условиями $D(x_1) = x_1$, $D(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1$. Тогда $Q(w) = D(w_1, w_2, \ldots, w_m)$, где $w_i = 2k_i + d_i - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w)$. Заметим, что случай $m = 1$ соответствует циркулянтному графу, рассмотренному выше, а случай $m = 2$ изучен ранее в [8].

4. Обобщенный Y-граф. Введём в рассмотрение обобщённый Y-граф $Y_n = Y_n(G_1, G_2, G_3)$, где $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$, $i = 1, 2, 3$. Для построения Y_n рассмотрим граф H, имеющий четыре вершины v_1, v_2, v_3, v_4 и три ребра v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4. Пусть $G_4 = C_n(\phi)$ — вырожденный циркулянтный граф, состоящий из n изолированных вершин. Тогда, по определению, положим $Y_n = H_n(G_1, G_2, G_3, G_4)$. В частном случае $G_1 = C_n(k)$, $G_2 = C_n(l)$, и $G_3 = C_n(m)$, граф Y_n совпадает с Y-графом $Y(n; k, l, m)$, определенным ранее в [12]. Тогда, полагая $A_i(w) = 2k_i + 1 - 2\sum_{j=1}^{k_i} T_{s_{i,j}}(w)$, имеем

$$Q(w) = 3A_1(w)A_2(w)A_3(w) - A_1(w)A_2(w) - \\ - A_1(w)A_3(w) - A_2(w)A_3(w).$$

5. Обобщённый H-граф. Обобщённый H-граф GH_n определим следующим образом. В качестве H выберем граф с вершинами $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и рёбрами $v_1v_5, v_5v_3, v_2v_6, v_6v_4, v_5v_6$. Положим $GH_n = H_n(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6)$, где $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \ldots, s_{i,k_i})$, $i = 1, 2, 3, 4$, а $G_5 = C_n(\phi)$ и $G_6 = C_n(\phi)$ — вырожденные циркулянтные графы на n вершинах. В частном случае $G_1 = C_n(i), G_2 = C_n(j), G_3 = C_n(k), G_4 = C_n(l)$ имеем граф $H(n; i, j, k, l)$, изученный ранее в работе [12]. Тогда

$$Q(w) = A_1(w)A_2(w)A_3(w)A_4(w) \times \\ \times \left(\left(3 - \frac{1}{A_1(w)} - \frac{1}{A_2(w)}\right)\left(3 - \frac{1}{A_3(w)} - \frac{1}{A_4(w)}\right) - 1 \right),$$

где полиномы $A_i(w)$ те же, что и выше.

6. Дискретный тор $T_{n,m} = C_n \times C_m$. Заметим, что $T_{n,m} = H_n(\underbrace{C_n, \ldots, C_n}_{m})$, где $H = C_m$, а $C_m = C_m(1)$ — циклический граф на m вершинах. Обобщённая матрица Лапласа графа $T_{n,m}$ от переменных $X = (\underbrace{x, \ldots, x}_{m})$ имеет вид

$$L(H, X) = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & -1 & x \end{pmatrix}.$$

При этом $L(H, X)$ является $(m \times m)$ циркулянтной матрицей с собственными значениями $\mu_j = x - 2\cos\left(\frac{2\pi j}{m}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Отсюда $\det L(H, X) = \prod_{j=0}^{m-1} \mu_j = 2T_m(x/2) - 2$ и $Q(w) = = 2T_m(2 - w) - 2$.

7. Прямое произведения $C_n \times H$, где H — регулярный граф. Пусть H — связный d-регулярный граф и C_n — циклический граф на n вершинах. Прямое произведение графов $C_n \times H$ может быть отождествлено с расслоением $H_n = H_n(\underbrace{C_n, \ldots, C_n}_{m})$. Для $X = (\underbrace{x, \ldots, x}_{m})$ имеем $L(H, X) = xI_m - A(H)$. Отсюда, $\det L(H, X)$ совпадает с характеристическим полиномом $\chi_H(x)$ графа H. В результате имеем $Q(w) = \chi_H(2 + d - 2w)$. В частности, $Q(-1) = \chi_H(4 + d)$.

Источники финансирования. Результаты, полученные в разделах 1 и 2, поддержаны фондом РФФИ (гранты 18–01–00420 и 18–501–51021). Результаты разделов 3 и 4 выполнены при финансовой поддержке лаборатории топологии и динамики Новосибирского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Y26.31.0025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boesch F.T., Prodinger H.* // Graphs and Combin. 1986. V. 2. 1. P. 191–200.
2. *Golin M.J., Xuerong Yong, Yuanping Zhang* // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 792–803.
3. *Sun W., Wang S., Zhang J.* // J. Appl. Anal. Comput. 2016. V. 6. 1. P. 65–75.
4. *Wu F.Y.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1977. V. 10. P. L113–115.
5. *Shrock R., Wu F.Y.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. P. 3881–3902.
6. *Guttmann* A.J., Rogers M.D. // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45. 49. 494001.
7. *Louis J.* //Bull. Aust. Math. Soc. 2015. V. 92, 3. P. 365–373.
8. *Abrosimov N.V., Baigonakova G.A., Mednykh I.A.* // Sib. Electronic Math. Rep. 2018. V. 15. P. 1145–1157.
9. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* // Linear Algebra Appl. 2017, V. 529, P. 355–373.
10. *Медных А.Д., Медных И.А.* // ДАН. 2018. Т. 479. № 4. С. 363–367.
11. *Mednykh I.A.* // Ars Math. Contemp. 2018. V. 15. P. 467–485.
12. *Horton J.D., Bouwer I.Z.* // J. Combin. Theory. Ser. B. 1991. V. 53. P. 114–129.
13. *Kwon Y.S., Mednykh A.D., Mednykh I.A.* // arXiv: 1811.03801v1 [math.CO] 09 Nov 2018.
14. *Lorenzini D.* // J. Combin. Theory Ser. B. 2008. V. 98. 6. P. 1271–1300.

COMPLEXITY OF DISCRETE SEIFERT FOLIATIONS OVER A GRAPH

Young Soo Kwon[1], A. D. Mednykh[2,3], I. A. Mednykh[2,3]

[1]*Yeungnam University, Republic Korea*

[2]*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

[3]*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS Yu.G. Reshetnyak December 21, 2018

Received January 10, 2019

In the present paper, we study the complexity of an infinite family of graphs $H_n = H_n(G_1, G_2, ..., G_m)$ that are discrete Seifert foliations over a graph H on m vertices with fibers $G_1, G_2, ..., G_m$. Each fiber $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, ..., s_{i,k_i})$ of this foliation is the circulant graph on n vertices with jumps $s_{i,1}, s_{i,2}, ..., s_{i,k_i}$. The family of discrete Seifert foliations is sufficiently large. It includes the generalized Petersen graphs, I-graphs, Y-graphs, H-graphs, sandwiches of circulant graphs, discrete torus graph and others. We obtain a closed formula for the number $\tau(n)$ of spanning trees in H_n in terms of Chebyshev polynomials, investigate some arithmetical properties of this function and find its asymptotics as $n \to \infty$.

Keywords: complexity of graph, circulant graph, cyclic covering, spanning tree, graph spectrum.