ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 4, с. 416–420

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.98

# О БИЛИНЕЙНЫХ ВЕСОВЫХ НЕРАВЕНСТВАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ВОЛЬТЕРРА

**Член-корреспондент РАН В. Д. Степанов[1,*], Г. Э. Шамбилова[2]**

Поступило 04.02.2019 г.

В работе даны необходимые и достаточные условия для ограниченности в весовых пространствах Лебега на вещественной полуоси одного класса билинейных неравенств с интегральными операторами Вольтерра.

*Ключевые слова*: весовое пространство Лебега, неравенство Харди, билинейный оператор.

**DOI:** https://doi.org/10.31857/S0869-56524864416-420

Пусть $\mathfrak{M}^+$ — множество всех неотрицательных измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$, а $\mathfrak{M}^\downarrow \subset \mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^\uparrow \subset \mathfrak{M}^+$ — конусы всех невозрастающих и неубывающих функций соответственно. При $v \in \mathfrak{M}^+$ и $0 < p < \infty$ определим весовое пространство Лебега

$$L_v^p := \left\{ f \in \mathfrak{M} : \| f \|_{L_v^p} := \left( \int_0^\infty | f(x)|^p \, v(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Пусть ядро $k: [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ — борелевская функция, удовлетворяющая условию Ойнарова [1]: $k(x,y) = 0,\ 0 \le x < y;\ k(x,y) \ge 0,\ 0 \le y \le x$ и

$$D^{-1}((k(x,z) + k(z,y)) \le k(x,y) \le D((k(x,z) + k(z,y)),\ x \ge z \ge y \ge 0, \tag{1}$$

где константа $D \ge 1$ не зависит от переменных $x, z, y$. Не ограничивая общности, будем считать, что функция $k(x,y)$ неубывающая по переменной $x$ и невозрастающая по переменной $y$, поскольку из (1) следует, что

$$k_0(x,y) := \sup_{y \le s \le x} \left[ \sup_{s \le z \le x} k(z,s) \right] \approx k(x,y),$$

где константы эквивалентности зависят только от $D$, поэтому для наших целей $k(x,y)$ всегда можно заменить на ядро $k_0(x,y)$, обладающее этими свойствами (см. [2, замечание 1.18]).

Пусть $1 \le p_1, p_2,\ q < \infty$ и $v_1, v_2, w \in \mathfrak{M}^+$. В работе рассматривается задача о характеризации билинейного неравенства

$$\| R_1^* f \cdot R_2 g \|_{L_w^q} \le C \| f \|_{L_{v_1}^{p_1}} \| g \|_{L_{v_2}^{p_2}},\ f, g \in \mathfrak{M}^+, \tag{2}$$

где константа $C$ не зависит от функций $f$ и $g$ и полагается наименьшей из возможных, а операторы имеют вид

$$\begin{aligned} R_1^* f(x) &:= \int_x^\infty k_1(y,x) f(y) dy, \\ R_2 g(x) &:= \int_0^x k_2(x,y) g(y) dy. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогичная задача имеет смысл для любой пары из четырёх операторов $R_i, R_i^*,\ i = 1, 2,$ где

$$\begin{aligned} R_1 f(x) &:= \int_0^x k_1(x,y) f(y) dy, \\ R_2^* g(x) &:= \int_x^\infty k_2(y,x) g(y) dy. \end{aligned} \tag{4}$$

Данная задача с интегральными операторами Харди, т.е. когда $k_i \equiv 1$, изучалась в [3] как дополнение к некоторым результатам о мультилинейных неравенствах [4, 5]. Более простое доказательство результатов [3] предложено в [6]. Для операторов Харди–Стеклова этот случай рассмотрен в [7]. Билинейные весовые неравенства с операторами Воль-

[1]*Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровск*

[2]*Российский университет дружбы народов, Москва*

**E-mail: stepanov@mi-ras.ru*

терра $R_1$ и $R_2$ изучены в [8], причём в случае $1<q<\min(p_1,p_2)$ результат получен редукционным методом, использующим вспомогательную функцию.

Аналогичная задача на конусах монотонных функций изучалась в работах [9–15].

При изучении билинейных весовых неравенств основным является редукционный метод, цепочкой сводящий искомое неравенство к неравенствам с операторами итерационного типа, поэтому от качества характеризации последних зависит прозрачность окончательного результата. В связи с этим в работе сначала получен явный критерий ограниченности квазилинейных интегральных операторов с ядрами Ойнарова в весовых пространствах Лебега на полуоси (раздел 1). Основной результат сообщения содержится в разделе 2.

Всюду в работе произведения вида $0\cdot\infty$ полагаются равными нулю. Соотношение $A\lesssim B$ означает $A\le cB$ с константой $c$, зависящей только от параметров суммирования и $D$; $A\approx B$ равносильно $A\lesssim B\lesssim A$. Если $1<p<\infty$, то $p':=\dfrac{p}{p-1}$. Константы $C$ в неравенствах типа (3) и других полагаются наименьшими из возможных и могут быть различными в разных местах.

## 1. ИТЕРАЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $u, v, w\in\mathfrak{M}^+$. Обозначим

$$V(t):=\int_0^t v^{1-p'},\quad U_*(t):=\int_t^\infty u, V_{2,k}(t):=\int_0^t k_2^{p'}(t,y)v^{1-p'}(y)dy.$$

В этом разделе решена задача об ограниченности квазилинейного интегрального оператора итерационного вида

$$\mathcal{J} f(x):=\left(\int_0^x k_1(x,y)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,z)f(z)dz\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}}, \quad (5)$$

а именно, найден явный критерий выполнения неравенства

$$\|\mathcal{J} f\|_{L_u^r}\le C\|f\|_{L_v^p},\ f\in\mathfrak{M}^+, \quad (6)$$

при $r>q$.

Замечание 1. Пусть $\varphi\in\mathfrak{M}^\uparrow$ и $\varphi$ непрерывна справа. Тогда существует мера Бореля $\eta_\varphi$, такая, что

$$\varphi(t)=\int_{[0,t]}d\eta_\varphi(s)=:\int_0^t d\eta_\varphi(s).$$

Аналогичное утверждение справедливо для невозрастающих функций. Таким образом, мы будем полагать, что для функции $V_{2,k}\in\mathfrak{M}^\uparrow$ существует борелевская мера $dV_{2,k}$, такая, что $V_{2,k}(t)=\int_{[0,t]}dV_{2,k}(s)$.

Теорема 1. *Пусть* $1<q, p, r<\infty$, $r>q$. *Тогда для наилучшей константы* $C_{\mathcal{J}}$ *в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x k_1(x,y)w(y)\left(\int_0^y k_2(y,t)f(t)dt\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}\le$$

$$\le C_{\mathcal{J}}\left(\int_0^\infty f^p v\right)^{\frac{1}{p}},\ f\in\mathfrak{M}^+, \quad (7)$$

*выполнены соотношения*:

(i) $1<p\le q<\infty$, *то* $C_{\mathcal{S}}\approx\mathbb{H}_1+\mathbb{H}_2$, *где*

$$\mathbb{H}_1:=\sup_{t>0}V^{\frac{1}{p'}}(t)\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_2^q(y,t)k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\mathbb{H}_2:=\sup_{t>0}V_2^{\frac{1}{p'}}(t)\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}};$$

(ii) $1<q<p<\infty$, $\dfrac{1}{s}:=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$, *то* $C_{\mathcal{S}}\approx\mathbb{G}_1+\mathbb{G}_2$, *где для* $p\le r$

$$\mathbb{G}_1:=\sup_{t>0}U_*^{\frac{1}{r}}(t)\left(\int_0^t\left(\int_x^t k_2^q(t,y)k_1(y,x)w(y)dy\right)^{\frac{s}{q}}dV^{\frac{s}{p'}}(x)\right)^{\frac{1}{s}}+$$

$$+\sup_{t>0}V^{\frac{1}{p'}}(t)\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_2^q(y,t)k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}};$$

$$\mathbb{G}_2:=\sup_{t>0}U_*^{\frac{1}{r}}(t)\left(\int_0^t\left(\int_x^t k_1(y,x)w(y)dy\right)^{\frac{s}{q}}dV_{2,k}^{\frac{s}{p'}}(x)\right)^{\frac{1}{s}}+$$

$$+\sup_{t>0} V_{2,k}^{\frac{1}{p'}}(t)\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{1}{r}}.$$

*Для* $r<p,\ \dfrac{1}{s_1}:=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{p},$

$$\mathbb{G}_1:=\left(\int_0^\infty\left(\int_0^t\left(\int_x^t k_2^q(t,y)k_1(y,x)w(y)dy\right)^{\frac{s}{q}}dV^{\frac{s}{p'}}(x)\right)^{\frac{s_1}{s}}\times\right.$$

$$\left.\times U_*^{\frac{s_1}{p}}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{s_1}}+$$

$$+\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_2^q(y,t)k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{s_1}{r}}dV^{\frac{s_1}{p'}}(t)\right)^{\frac{1}{s_1}},$$

$$\mathbb{G}_2:=\left(\int_0^\infty\left(\int_0^t\left(\int_x^t k_1(y,x)w(y)dy\right)^{\frac{s}{q}}dV_{2,k}^{\frac{s}{p'}}(x)\right)^{\frac{s_1}{s}}U_*^{\frac{s_1}{p}}(t)u(t)dt\right)^{\frac{1}{s_1}}+$$

$$+\left(\int_0^\infty\left(\int_t^\infty\left(\int_t^x k_1(x,y)w(y)dy\right)^{\frac{r}{q}}u(x)dx\right)^{\frac{s_1}{r}}dV_{2,k}^{\frac{s_1}{p'}}(t)\right)^{\frac{1}{s_1}}.$$

## 2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОГО НЕРАВЕНСТВА

Случай $1<\min(p_1,p_2)\le q<\infty$ неравенства (2) был решён в явном виде в работе [8], а для случая $1<q<\min(p_1,p_2)$ доказана редукционная теорема. Используя теорему 1, мы дополняем этот случай явным критерием.

Пусть $V_i(t):=\int_0^t v_i^{1-p_i'},\ V_{i*}(t):=\int_t^\infty v_i^{1-p_i'},\ i=1,2;$

$$\mathcal{V}_{2,k}(t):=\int_0^t k_2^{p_2'}(t,y)v_2^{1-p_2'}(y)dy,\ \frac{1}{r_i}:=\frac{1}{q}-\frac{1}{p_i},\ i=1,2.$$

Для наименьшей константы $C$ в неравенстве (2) запишем

$$C=\sup_{0\ne g\in\mathfrak{M}^+}\|g\|_{p_2,v_2}^{-1}\sup_{0\ne f\in\mathfrak{M}^+}\frac{\left(\int_0^\infty[R_1^*f R_2 g]^q w\right)^{\frac{1}{q}}}{\|f\|_{p_1,v_1}}=:$$

$$=:\sup_{0\ne g\in\mathfrak{M}^+}\|g\|_{p_2,v_2}^{-1}\ \mathcal{F}(g).$$

Пусть $1<q<\min(p_1,p_2)$. Для фиксированного $g\in\mathfrak{M}^+$, применяя теорему 1.2 из [1] (см. также [2, §1.3]), получим

$$\mathcal{F}(g)\approx\mathcal{F}_1(g)+\mathcal{F}_2(g),$$

где

$$\mathcal{F}_1^{r_1}(g):=\int_0^\infty\left(\int_0^y k_1^q(y,x)(R_2g(x))^q w(x)dx\right)^{\frac{r_1}{q}}\times$$

$$\times V_{1*}^{\frac{r_1}{q'}}(y)v_1^{1-p_1'}(y)dy,$$

$$\mathcal{F}_2^{r_1}(g):=\int_0^\infty\left(\int_0^y(R_2g)^q w\right)^{\frac{r_1}{p_1}}K_{1*}(y)(R_2g)^q w(y)dy,$$

$$K_{1*}(y):=\left(\int_y^\infty k_1^{p_1'}(s,y)v_1^{1-p_1'}(s)ds\right)^{\frac{r_1}{p_1'}}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $K_{1*}\in\mathfrak{M}^{\downarrow}$ и $K_{1*}(y)=\int_{[y,\infty)}d(-K_{1*})$. Тогда

$$\mathcal{F}_2^{r_1}(g)\approx\int_0^\infty\left(\int_0^y(R_2g)^q w\right)^{\frac{r_1}{q}}d(-K_{1*}(y)),$$

откуда $C\approx\mathbb{F}+\tilde{\mathbb{F}}$, где

$$\mathbb{F}:=\sup_{0\ne g\in\mathfrak{M}^+}\|g\|_{p_2,v_2}^{-1}\ \mathcal{F}_1(g);\tilde{\mathbb{F}}:=\sup_{0\ne g\in\mathfrak{M}^+}\|g\|_{p_2,v_2}^{-1}\ \mathcal{F}_2(g).$$

Для оценки функционалов $\mathbb{F}$ используем теорему 1

($a_1$) пусть $\dfrac{1}{q}\le\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}$ (т.е. $1<q<p_2\le r_1$), тогда

$$\mathbb{F}\approx\mathbb{F}_1+\mathbb{F}_2, \tag{8}$$

$$\mathbb{F}_1 := \sup_{t>0} V_{1*}^{\frac{1}{p_1'}}(t) \left( \int_0^t \left( \int_x^t k_2^q(t,y) k_1^q(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} dV_2^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{1}{r_2}} +$$

$$+ \sup_{t>0} V_2^{\frac{1}{p_2'}}(t) \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x k_2^q(y,t) k_1^q(x,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d\left( -V_{1*}^{\frac{r_1}{p_1'}}(x) \right) \right)^{\frac{1}{r_1}};$$

$$\mathbb{F}_2 := \sup_{t>0} V_{1*}^{\frac{1}{p_1'}}(t) \left( \int_0^t \left( \int_x^t k_1^q(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{1}{r_2}} +$$

$$+ \sup_{t>0} \mathcal{V}_{2,k}^{\frac{1}{p_2'}}(t) \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x k_1^q(x,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d\left( -V_{1*}^{\frac{r_1}{p_1'}}(x) \right) \right)^{\frac{1}{r_1}};$$

($\delta_1$) при $\frac{1}{q} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ (т.е. $1 < q < r_1 < p_2$), $\frac{1}{s} := \frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_2}$ имеем

$$\mathbb{F} \approx \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 =: \mathbf{F}, \tag{9}$$

$$\mathbf{F}_1 := \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t \left( \int_x^t k_2^q(t,y) k_1^q(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} dV_2^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{s}{r_2}} d\left(-V_{1*}^{\frac{s}{p_1'}}(t)\right) \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left( \int_0^\infty \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x k_2^q(y,t) k_1^q(x,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d\left(-V_{1*}^{\frac{r_1}{p_1'}}(x)\right) \right)^{\frac{s}{r_1}} dV_2^{\frac{s}{p_2'}}(t) \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\mathbf{F}_2 := \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t \left( \int_x^q k_1^q(y,x) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{s}{r_2}} d\left(-V_{1*}^{\frac{s}{p_1'}}(t)\right) \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left( \int_0^\infty \left( \int_t^\infty \left( \int_t^q k_1^q(x,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d\left(-V_{1*}^{\frac{r_1}{p_1'}}(x)\right) \right)^{\frac{s}{r_1}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{s}{p_2'}}(t) \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Снова применяя теорему 1, находим оценки для функционалов $\tilde{\mathbb{F}}$:

($a_2$) при $\frac{1}{q} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ (т.е. $1 < q < p_2 \le r_1$), находим

$$\tilde{\mathbb{F}} \approx \tilde{\mathbb{F}}_1 + \tilde{\mathbb{F}}_2, \tag{10}$$

$$\tilde{\mathbb{F}}_1 := \sup_{t>0} K_{1*}^{\frac{1}{r_1}}(t) \left( \int_0^t \left( \int_x^t k_2^q(t,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} dV_2^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{1}{r_2}} +$$

$$+ \sup_{t>0} V_2^{\frac{1}{p_2'}}(t) \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x k_2^q(y,t) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d(-K_{1*}(x)) \right)^{\frac{1}{r_1}};$$

$$\tilde{\mathbb{F}}_2 := \sup_{t>0} K_{1*}^{\frac{1}{r_1}}(t) \left( \int_0^t \left( \int_x^t w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{1}{r_2}} +$$

$$+ \sup_{t>0} \mathcal{V}_{2,k}^{\frac{1}{p_2'}}(t) \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x w \right)^{\frac{r_1}{q}} d(-K_{1*}(x)) \right)^{\frac{1}{r_1}};$$

($\delta_2$) если $\frac{1}{q} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ (т.е. $1 < q < r_1 < p_2$), $\frac{1}{s} := \frac{1}{r_1} - \frac{1}{p_2}$, то

$$\tilde{\mathbb{F}} \approx \tilde{\mathbf{F}}_1 + \tilde{\mathbf{F}}_2 =: \tilde{\mathbf{F}}, \tag{11}$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 := \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t \left( \int_x^t k_2^q(t,y) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_2}{q}} dV_2^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{s}{r_2}} d\left(-K_{1*}^{\frac{s}{r_1}}(t)\right) \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+ \left( \int_0^\infty \left( \int_t^\infty \left( \int_t^x k_2^q(y,t) w(y)\,dy \right)^{\frac{r_1}{q}} d(-K_{1*}(x)) \right)^{\frac{s}{r_1}} dV_2^{\frac{s}{p_2'}}(t) \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_2 := \left( \int_0^\infty \left( \int_0^t \left( \int_x^t w \right)^{\frac{r_2}{q}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{r_2}{p_2'}}(x) \right)^{\frac{s}{r_2}} d\left(-K_{1*}^{\frac{s}{r_1}}(t)\right) \right)^{\frac{1}{s}} +$$

$$+\left(\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty}\left(\int_t^x w\right)^{\frac{r_1}{q}} d(-K_{1*}(x))\right)^{\frac{s}{r_1}} d\mathcal{V}_{2,k}^{\frac{s}{p_2'}}(t)\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть* $1<q<\min(p_1,p_2)<\infty$ *и* $\frac{1}{r_i}:=\frac{1}{q}-\frac{1}{p_i}$, $i=1,2$. *Тогда для наилучшей константы* $C$ *в неравенстве* (2) *выполнены соотношения*

(i) $\frac{1}{q}\le\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$, *тогда* $C\approx\mathbb{F}+\tilde{\mathbb{F}}$, *где* $\mathbb{F},\tilde{\mathbb{F}}$ *определены в* (8) *и* (10);

(ii) $\frac{1}{q}>\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}$ *и* $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}$, *тогда* $C\approx\mathbf{F}+\tilde{\mathbf{F}}$, *где* $\mathbf{F},\tilde{\mathbf{F}}$ *определены в* (9) *и* (11).

**Источники финансирования.** Результаты работы авторов частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19–01–00223). Работа второго автора частично выполнена в рамках программы “RUDN University Program 5–100”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ойнаров Р.* // Тр. МИАН. 1993. Т. 2014. С. 240–250.
2. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д., Ушакова Е.П.* Интегральные операторы Харди–Стеклова // Совр. пробл. математики. МИАН, 2016. Т. 22.
3. *Aguilar Cañestro M.I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C.* // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387. № 1. P. 320–334.
4. *Cwikel M., Kerman R.* // J. Funct. Anal. 1992. V. 106. № 1. P. 130–144.
5. *Grafakos L., Torres R.H.* // J. Funct. Anal. 2001. V. 187. № 1. P. 1–24.
6. *Křepela M.* // Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 2017. V. 60. P. 955–971.
7. *Jain P., Kanjilal S., Stepanov V.D., Ushakova E.P.* // Math. Notes. 2018. V. 104. № 6. P. 823–832.
8. *Прохоров Д.В.* // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.
9. *Křepela M.* // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50.
10. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 652–656.
11. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 639–658.
12. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2016. Т. 471. № 6. С. 645–650.
13. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2017. Т. 475. 1. С. 17–23.
14. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 5. С. 1131–1155.
15. *Stepanov V.D., Shambilova G.E.* // Eurasian Math. J. 2017. V. 8. № 2. P. 47–73.

# ON BILINEAR WEIGHTED INEQUALITIES WITH VOLTERRA INTEGRAL OPERATORS

**Corresponding Member of the RAS V. D. Stepanov[1], G. E. Shambilova[2]**

[1]*Computing Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*

[2]*Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

Received February 4, 2019

Necessary and sufficient conditions on the boundedness in weighted Lebesgue spaces on the semiaxis for bilinear inequalities with Volterra integral operators are given.

*Keywords*: weighted Lebesgues space, Volterra integral operator, bilinear Hardytype inequality.