ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 4, с. 430–432

МЕХАНИКА

УДК 539.3+517.956

ДЕФОРМАТОРЫ ВЫСОКИХ РАНГОВ И ТЕНЗОРЫ НЕСОВМЕСТНОСТИ КРЁНЕРА С ДВУМЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ ИНДЕКСОВ

Д. В. Георгиевский

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 14.02.2019 г.

Поступило 19.02.2019 г.

Для компонент обобщённых деформаций ранга m, связанных с обобщёнными перемещениями ранга $m-1$ аналогами кинематических соотношений Коши в n-мерном пространстве (многомерной сплошной среде) выводятся уравнения совместности ($m \geq 1$, $n \geq 2$). Они могут быть записаны в виде равенства нулю всех компонент тензора несовместности ранга $m(n-2)$ либо двойственного к нему обобщённого тензора Римана–Кристоффеля ранга $2m$. Находится число независимых компонент этих тензоров, совпадающее с числом уравнений совместности в терминах обобщённых деформаций.

Ключевые слова: деформация, уравнения совместимости, обобщённый тензор несовместимости Крёнера, обобщённый тензор Римана–Кристоффеля, многомерная сплошная среда.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524864430-432

Вопросы совместности систем дифференциальных уравнений в частных производных, различные формы записи уравнений совместности и их эквивалентность играют важную роль в постановках задач механики деформируемого твёрдого тела в напряжениях. Ниже для компонент деформаторов высоких рангов, связанных с обобщёнными перемещениями аналогами кинематических соотношений Коши в n-мерном пространстве (многомерной сплошной среде), выводятся уравнения совместности. Они записываются в виде равенства нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера с двумерным массивом индексов либо двойственного к нему обобщённого тензора Римана–Кристоффеля.

В пространстве R^n рассмотрим систему дифференциальных соотношений

$$u_{(i_1\ldots i_{m-11},i_m)} \equiv u_{i_1\ldots i_{m-11},i_m} + u_{i_2\ldots i_m,i_1} + \ldots + \\ + u_{i_m i_1\ldots i_{m-2},i_{m-11}} = m\varepsilon_{i_1\ldots i_m}, \qquad (1)$$

связывающих декартовы компоненты тензора $u^{\{m-1\}}(\mathbf{x})$ ранга $m-1$ и тензора $\varepsilon^{\{m\}}(\mathbf{x})$ ранга $m \geq 1$. Запятая в индексе обозначает частную производную по соответствующей координате. Положим массив $u_{i_1\ldots i_{m-1}}$ абсолютно симметричным, т.е. симметричным по перестановкам любых двух индексов. Тогда согласно (1) массив $\varepsilon_{i_1\ldots i_m}$, являющийся циклической симметричной частью градиента $u^{\{m-1\}}$, также будет абсолютно симметричным. С учётом этих симметрий среди n^{m-1} компонент $u^{\{m-1\}}$ независимых будет C^{m-1}_{m+n-2}, а среди n^m компонент $\varepsilon^{\{m\}}$ число независимых, как и число независимых соотношений (1), равно C^m_{m+n-1}.

Поставим задачу отыскания условий совместности, налагаемых на C^m_{m+n-1} компонент $\varepsilon^{\{m\}}$, для интегрируемости системы (1) относительно C^{m-1}_{m+n-2} компонент $u^{\{m-1\}}$. Для $m = 1$ и $m = 2$ эта задача имеет хорошо известные в тензорном анализе и кинематике сплошной среды решения.

Действительно, при $m = 1$ система (1) равносильна векторному уравнению $\operatorname{grad} u^{\{0\}} = \varepsilon^{\{1\}}$ относительно скалярного поля $u^{\{0\}}(\mathbf{x})$. Условия совместности n компонент вектора $\varepsilon^{\{1\}}(\mathbf{x})$ можно представить в виде равенства нулю всех компонент ротора $\varepsilon^{\{1\}}$, который в n-мерном пространстве есть антисимметричный по любой паре своих индексов тензор $\eta^{\{n-2\}}(\varepsilon^{\{1\}}) \equiv (\operatorname{Rot}\varepsilon^{\{1\}})^{\{n-2\}}$ ранга $n-2$:

$$\eta_{i_1\ldots i_{n-2}} \equiv \epsilon_{i_1\ldots i_n}\,\varepsilon_{i_n,i_{n-1}} = 0, \qquad (2)$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

где $\epsilon_{i_1\ldots i_n}$ — n-индексный символ Леви-Чивиты. Число $b_{1;n}$ независимых уравнений (2) равно $n(n-1)/2$.

При $m = 2$ систему (1) можно записать в форме соотношений Коши $\operatorname{Def} u^{\{1\}} = \varepsilon^{\{2\}}$, где $u^{\{1\}}(\mathbf{x})$ — вектор перемещений, $\varepsilon^{\{2\}}(\mathbf{x})$ — тензор малых деформаций. Совместность $n(n+1)/2$ его компонент обеспечивается тождествами Сен–Венана, которые записываются в виде равенства нулю всех компонент тензора несовместности Крёнера $\eta^{\{2(n-2)\}}(\varepsilon^{\{2\}}) \equiv (\operatorname{Ink} \varepsilon^{\{2\}})^{\{2(n-2)\}}$ ранга $2(n-2)$:

$$\eta_{i_1\ldots i_{n-2} j_1\ldots j_{n-2}} \equiv \epsilon_{i_1\ldots i_n} \epsilon_{j_1\ldots j_n} \varepsilon_{i_n j_{n-1}, i_{n-1} j_n} = 0. \tag{3}$$

Число $b_{2;n}$ независимых уравнений (3) равно $n^2(n^2-1)/12$ (см., например, [1, 2]).

При $m \geq 3$ в [3, 4] по аналогии с терминологией случая $m = 2$ предложено называть $\varepsilon^{\{1\}}$ деформаторами высоких рангов, а связи (1) — обобщёнными соотношениями Коши. По той же аналогии введём в рассмотрение тензор несовместности Крёнера $\eta^{\{m(n-2)\}}(\varepsilon^{\{m\}})$ ранга $m(n-2)$ с компонентами, имеющими двумерный массив индексов:

$$\eta_{i_{11}\ldots i_{1;n-2}\ldots i_{m1}\ldots i_{m;n-2}} = \\ = \epsilon_{i_{11}\ldots i_{1n}} \ldots \epsilon_{i_{m1}\ldots i_{mn}} \varepsilon_{i_{1n} i_{2;n-1} i_{3n}\ldots i_{ml}, i_{1;n-1} i_{2n} i_{3;n-1}\ldots i_{mk}}, \tag{4}$$

где $l = n$ и $k = n - 1$, если m нечётно; $l = n - 1$ и $k = n$, если m чётно.

Число независимых компонент $\eta^{\{m(n-2)\}}$ совпадает с числом независимых компонент тензора $R^{\{2m\}}$ ранга $2m$ (при любом n), двойственного к $\eta^{\{m(n-2)\}}$, т.е. получающегося из него свёртками с символами Леви-Чивиты:

$$R_{p_1 q \ldots p_m q_m} = \epsilon_{p_1 q_1 i_1 1\ldots i_1 ; n-2} \ldots \epsilon_{p_m q_m i_m 1\ldots i_{m;n-2}} \times \\ \times \eta_{i_{11}\ldots i_{1;n-2}\ldots i_{m1}\ldots i_{m;n-2}}. \tag{5}$$

Используя свойство суммирования по $n - 2$ индексам

$$\epsilon_{p_1 q_1 i_{11}\ldots i_{1;n-2}} \epsilon_{i_{11}\ldots i_{1n}} = \\ = (n-2)!(\delta_{p_1 i_{1;n-1}} \delta_{q_1 i_{1n}} - \delta_{p_1 i_{1n}} \delta_{q_1 i_{1;n-1}}), \tag{6}$$

после подстановки (4) в (5) получим

$$R_{p_1 q_1 \ldots p_m q_m} = \\ = [(n-2)!]^m (\delta_{p_1 i_{1;n-1}} \delta_{q_1 i_{1n}} - \delta_{p_1 i_{1n}} \delta_{q_1 i_{1;n-1}}) \times \ldots \\ \ldots \times (\delta_{p_m i_{m;n-1}} \delta_{q_m i_{mn}} - \delta_{p_m i_{mn}} \delta_{q_m i_{m;n-1}}) \times \\ \times \varepsilon_{i_{1n} i_{2;n-1} i_{3n}\ldots i_{ml}, i_{1;n-1} i_{2n} i_{3;n-1}\ldots i_{mk}}. \tag{7}$$

Тензору $R^{\{2m\}}$ с компонентами (7) естественно придать смысл обобщения тензора Римана–Кристоффеля, определённого в дифференциальной геометрии для $m = 2$. Согласно (5) массив $R_{p_1 q_1 \ldots p_m q_m}$: а) антисимметричен по перестановке индексов внутри каждой пары $\{p_i, q_i\}$; б) симметричен по перестановкам самих пар $\{p_i, q_i\}$ и $\{p_j, q_j\}$ при всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$. Так как число различных ненулевых сочетаний в каждой из этих пар равно $b_{1;n} = n(n-1)/2$, то отмеченная симметрия оставляет $C^m_{m-1+b_{1;n}}$ компонент тензора $R^{\{2m\}}$, а следовательно, и тензора $\eta^{\{m(n-2)\}}$. Не все они являются независимыми в силу тождеств Риччи (дифференциальных связей второго порядка, наложенных на компоненты деформатора). Для $m = 2$ этих тождеств C^4_n и они записываются известным образом:

$$R_{p_1\{q_1 p_2 q_2\}} \equiv R_{p_1 q_1 p_2 q_2} + R_{p_1 p_2 q_2 q_1} + R_{p_1 q_2 q_1 p_2} = 0, \tag{8}$$

где обозначение $\{q_1 p_2 q_2\}$ соответствует взятию суммы по всем чётным перестановкам заключённых в скобках индексов.

Аналоги тождеств (8) для обобщённого тензора Римана–Кристоффеля $R^{\{2m\}}$ имеют вид

$$R_{p_1\{q_1 p_2 q_2 \ldots p_m q_m\}} = 0 \tag{9}$$

и насчитывают $(2m-1)!/2$ слагаемых в левой части. Согласно (7), каждое из них — линейная комбинация 2^m производных m-го порядка от компонент деформатора. Выписывание всей структуры соотношений (9) уже для $m = 3$ довольно громоздко. Тождества (9) сокращают число независимых компонент тензора $R^{\{2m\}}$ на C^{2m}_n штук. Это сокращение нетривиально лишь в пространствах достаточно высокой размерности: $n \geq 2m$.

Итак, число $b_{m;n}$ независимых компонент (4) тензора несовместности Крёнера $\eta^{\{m(n-2)\}}$, а следовательно, и число уравнений совместности для системы (1)

$$b_{m;n} = C^m_{m-1+b_{1;n}} - C^{2m}_n, \quad m \geq 2, \; n \geq 2. \qquad (10)$$

Выражение (9) можно представить в виде многочлена по n степени $2m$, причём коэффициент $\frac{1}{2^m \cdot m!} - \frac{1}{(2m)!}$ при старшей его степени n^{2m} положителен при $m \geq 2$. Таким образом, при фиксированном $m \geq 2$ число $b_{m;n}$ с ростом n растёт как n^{2m}, в то время как число независимых компонент деформатора $\varepsilon^{\{m\}}$ растёт как n^m.

Источники финансирования. Работа поддержана РФФИ (гранты 18–29–10085мк, 19–01–00016а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986. 263 с.
2. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Изд-во УРСС, 2003. 664 с.
3. *Георгиевский Д.В.* // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 1. С. 127–132.
4. *Georgievskii D.V.* // Rus. J. Math. Phys. 2016. V. 23. № 4. P. 475–483.

THE DEFORMATORS OF HIGH RANKS AND THE KRÖNER INCOMPATIBILITY TENSORS WITH TWO-DIMENSIONAL STRUCTURE OF SUBSCRIPTS

D. V. Georgievskii

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov February 14, 2019

Received February 19, 2019

In n-dimensional space (multidimensional continuum) the compatibility equations are derived for the components of the generalized deformators of rank m which are connected with the generalized displacements of rank $m - 1$ by analogues of the Cauchy kinematic relations ($m \geq 1$, $n \geq 2$). They may be written in form of equal to zero for all the components of the incompatibility tensor of rank $m(n - 2)$ or for dual to it the generalized Riemann–Christoffel tensor of rank $2m$. The number of independent components of these tensors coinciding with the number of compatibility equations in terms of the generalized deformations, is obtained.

Keywords: deformation, compatibility equations, the generalized Kroener incompatibility tensor, the generalized Riemann–Christoffel tensor, multidimensional continuum.