УДК 528.23

ТОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ВЫСОТ ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТИ НЕБЕСНОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ТРЁХОСНОГО ЭЛЛИпсоИДА

М. Э. Флейс*, М. В. Нырцов, М. М. Борисов, А. И. Соколов

Представлено академиком РАН В.М. Котляковым 25.05.2017 г.

Поступило 01.06.2017 г.

Аппроксимация физической поверхности Земли математической поверхностью как правило осуществляется сферой или эллипсоидом вращения. В отдельных случаях используется трёхосный эллипсоид. Вычисление геодезической высоты точек поверхности Земли проводится в основном приближёнными методами с использованием формул зависимости пространственных прямоугольных координат x, y, z от геодезических B, L, H . Однако существуют малые тела Солнечной системы, например астероид 433 Эрос, для которых такие варианты первого приближения некорректны, поскольку в этом случае оба первых приближения не являются малыми величинами. В данной статье предлагается принципиально новый подход к вычислению геодезической высоты относительно трёхосного эллипсоида, основанный на совместном использовании уравнения нормали к поверхности, проходящей через заданную точку и уравнения собственно поверхности. Метод сводится к решению уравнения шестой степени методом Штурма и уравнения четвёртой степени методом Феррари.

Ключевые слова: трёхосный эллипсоид, геодезическая высота, метод Штурма.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524864489-493>

Аппроксимация физической поверхности Земли математической поверхностью как правило осуществляется сферой или эллипсоидом вращения. В отдельных случаях используется трёхосный эллипсоид. Вычисление геодезической высоты точек поверхности Земли проводится в основном приближёнными методами с использованием формул зависимости пространственных прямоугольных координат x, y, z от геодезических B, L, H . Все вычисления используют предположение о малых величинах сжатия или эксцентриситета эллипса, вращением которого получается эллипсоид. Однако форма некоторых небесных тел Солнечной системы существенно отличается от сферической, поэтому такое допущение не является корректным. Для аппроксимации подобных тел используется трёхосный эллипсоид. В связи со сложностью определения геодезической высоты относительно трёхосного эллипсоида или эллипсоида вращения с большим полярным сжатием некоторые авторы предлагают использовать геодезическую высоту относительно

сферы [7]. Для гипсометрической карты спутника Марса Фобоса в Атласе планет Земной группы [1] за уровненную поверхность была принята поверхность трёхосного эллипсоида и высоты определялись по радиус-вектору, взятому из цифровой модели рельефа. В работе [3] также рекомендуется использовать в качестве аппроксимирующей поверхности для Фобоса трёхосный эллипсоид и уточняются параметры этого эллипсоида.

В работе [4] разработан итерационный метод определения геодезической высоты относительно трёхосного эллипсоида. В качестве первого приближения авторы предлагают выбирать либо нулевое значение высоты H , либо разность длин радиус-вектора до исходной точки и радиус-вектора до точки пересечения с эллипсоидом. Метод опробован при создании некоторых карт Атласа Фобоса [2]. Однако существуют малые тела Солнечной системы, например, астероид 433 Эрос, для которых такие варианты первого приближения некорректны.

В данной работе предлагается принципиально новый подход к вычислению геодезической высоты относительно трёхосного эллипсоида, основанный на совместном использовании уравнения нормали

Институт географии Российской Академии наук,
Москва

*E-mail: maria@geocnt.geonet.ru

к поверхности, проходящей через заданную точку и уравнения собственно поверхности. Метод сводится к решению уравнения шестой степени методом Штурма [6] и уравнения четвёртой степени методом Феррари [5].

Геодезическая высота, т.е. кратчайшее расстояние от точки физической поверхности небесного тела (x_0, y_0, z_0) до аппроксимирующей её поверхности задается отрезком прямой, перпендикулярной этой поверхности и проходящей через точку (x, y, z) . Линия, перпендикулярная математической поверхности $f(x, y, z) = C$ и проходящая через точку с координатами (x_0, y_0, z_0) , задаётся уравнениями

$$\frac{x_0 - x}{\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}} = \frac{y_0 - y}{\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}} = \frac{z_0 - z}{\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}}.$$

Расстояние между точками с координатами (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z)

$$h = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}. \quad (1)$$

Если $f(x, y, z) = C$ — трёхосный эллипсоид с полуосями a, b, c , для определения точки поверхности с координатами (x, y, z) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} &= \frac{y_0 - y}{\frac{y}{b^2}}, \\ \frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} &= \frac{z_0 - z}{\frac{z}{c^2}}, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Выразив y и z через x из первых двух уравнений, на основании третьего уравнения получим уравнение шестой степени относительно x . Однако при большой разнице в величинах полуосей может возникнуть слишком значительный разброс значений коэффициентов этого уравнения, что в свою очередь, может привести к снижению точности вычислений. Чтобы этого избежать сделаем подстановку

$$x_0 = ax_{0n}, \quad y_0 = by_{0n}, \quad z_0 = cz_{0n},$$

$$x = ax_n, \quad y = by_n, \quad z = cz_n.$$

Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{x_{0n} - x_n}{x_n} &= \frac{(1 - e_1^2)(y_{0n} - y_n)}{y_n}, \\ \frac{x_{0n} - x_n}{x_n} &= \frac{(1 - e^2)(z_{0n} - z_n)}{z_n}, \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 &= 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где e_1^2, e^2 — квадраты эксцентриситетов экваториального эллипса и эллипса сечения начального меридиана.

Соответственно получим уравнение шестой степени относительно x_n

$$a_0 x_n^6 + a_1 x_n^5 + a_2 x_n^4 + a_3 x_n^3 + a_4 x_n^2 + a_5 x_n + a_6 = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты этого уравнения

$$\begin{aligned} a_0 &= e_1^4 e^4, \\ a_1 &= -2x_{0n}(e_1^2 + e^2)e_1^2 e^2, \\ a_2 &= x_{0n}^2 \left[(e_1^2 + e^2)^2 + 2e_1^2 e^2 \right] + \\ &\quad + y_{0n}^2 e^4 (1 - e_1^2)^2 + z_{0n}^2 e_1^4 (1 - e^2)^2 - e_1^4 e^4, \\ a_3 &= 2x_{0n} \left[e_1^2 + e^2 \right] (e_1^2 e^2 - x_{0n}^2) - y_{0n}^2 e^2 (1 - e_1^2)^2 - \\ &\quad - (z_{0n}^2 e_1^2 (1 - e^2)^2), \\ a_4 &= x_{0n}^2 \left[x_{0n}^2 + y_{0n}^2 (1 - e_1^2)^2 + z_{0n}^2 (1 - e^2)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (e_1^2 + e^2)^2 - 2e_1^2 e^2 \right], \\ a_5 &= 2x_{0n}^3 (e_1^2 + e^2), \\ a_6 &= -x_{0n}^4. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае, когда точка (x_0, y_0, z_0) лежит в одной из координатных плоскостей или математическая поверхность является эллипсоидом вращения, уравнение (4) переходит в уравнение четвёртой степени.

При решении уравнения (4) первые два корня x_{1n}, x_{2n} находятся с помощью ряда Штурма, а остальные корни методом Феррари. Из найденных корней выбирается тот, для которого расстояние h минимально. Планетоцентрическую широту и долготу точки поверхности с координатами (x, y, z) получаем из известных формул

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi.$$

Для расчёта высот разработана и размещена на сайте ЦГИ ИГ РАН программа на языке JavaScript

[8]. Программный код можно просматривать и копировать. Входными данными являются планетоцентрические долгота и широта точки физической поверхности и длина радиус-вектора до этой точки. На выходе добавляются значения новых широт, долгот и высота.

Для подтверждения теоретических изысканий были построены гипсометрические карты для астероида 433 Эрос по данным цифровой модели NLR190 [9]. При создании карт мы привязываем вычисленную высоту именно к вышеупомянутым угловым координатам. Заметим, что геодезическая широта у точек с координатами x_0, y_0, z_0 и x, y, z одинакова.

Рассмотренная методика определения геодезических высот предоставляет возможности анализа предлагаемой математической поверхности в целях картографирования рельефа. При этом большие отклонения физической поверхности тела от эллипсоида могут быть вызваны как большими колебаниями высот, так и неудачно выбранными параметрами эллипсоида, в том числе его ориентацией относительно тела. Заметим, что на гипсометрической карте Фобоса в Атласе планет Земной группы [1] тематическая нагрузка дана без учёта гипсометрии локальных форм рельефа. В Атласе Фобоса [2] горизонталы отображаются поверх фотомозаики, но не всегда согласуются с локальными формами рельефа.

На рис. 1 представлена гипсометрическая карта астероида 433 Эрос в равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида с полуосями 17 000 м, 5500 м, 5500 м, рекомендованного Международным астрономичес-

ким союзом. При сравнении с фотокартой (рис. 2) видно, что в области меридиана 0, 360° возникает область перепада высот, не соответствующая реальному рельефу. Использование эллипсоида с параметрами 14 000 м, 5500 м, 5500 м позволяет более адекватно отобразить формы рельефа в этой области (рис. 3).

Таким образом, предложено точное определение геодезической высоты точек поверхности небесного тела относительно трёхосного эллипсоида с произвольным сжатием. Разработанная методика апробирована на примере астероида 433 Эрос, но может быть распространена и на другие тела. По аналогии с Землёй, для которой используются различные эллипсоиды вращения, для наилучшей аппроксимации отдельных территорий предлагается использовать различные референц-эллипсоиды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлас планет земной группы и их спутников / Под ред. В.Д. Большакова. М.: МИИГАиК, 1992. 208 с.
2. Карачевцева И.П., Кононихин А.А., Коханов А.А. и др. Атлас Фобоса. М.: МИИГАиК, 2015. 220 с.
3. Зубарев А.Э., Надеждина И.Е., Кононихин А.А. Проблемы обработки данных дистанционного зондирования для моделирования фигур малых тел Солнечной системы // Соврем. пробл. дистанц. зондирования Земли из космоса. 2012. Т. 9. № 4. С. 277–285.
4. Огородова Л.В., Кононихин А.А., Надеждина И.Е. Вычисление геодезических координат для трёхосного отсчётного эллипсоида // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. 2012. № 5. С. 9–13.

Рис. 1. Гипсометрическая карта астероида 433 Эрос для трёхосного эллипсоида с полуосями 17 000 м, 5500 м, 5500 м.

Рис. 2. Фотокарта астероида 433 Эрос для трёхосного эллипсоида с полуосями 17 000 м, 5500 м, 5500 м.

Рис. 3. Гипсометрическая карта астероида 433 Эрос для трёхосного эллипсоида с полуосями 14 000 м, 5500 м, 5500 м.

5. Сушкевич А.К. Основы высшей алгебры. М.-Л.: ОГИЗ, 1941. 460 с.
6. Шафаревич И.Р. О решении уравнений высших степеней: (Метод Штурма). М.: Гостехиздат, 1954. 24 с.
7. Zuber, M.T., Smith D.E., Cheng A.F., Garvin J.B., Aharonson O., Cole T.D., Dunn P.J., Guo Y., Lemoine F.G., Neumann G.A., Rowlands D.D., Torrence M.H. The Shape of 433 Eros from the NEAR Laser Rangefinder // Sci. 2000. V. 289. P. 1788–1793.
8. Программа расчёта высот. Электронный ресурс. М.: Центр геоинформ. исслед. Ин-та географии РАН. <http://geocnt.geonet.ru/ru/calculate>. Дата обращения: 19.05.2017.
9. The Shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker Laser Rangefinder [Электронный ресурс]// The Zuber Research Group. Massachusetts Inst. Technol. <http://sebag.mit.edu/near/nlr.30day.html>. Дата обращения: 19.05.2017.

THE ACCURATE CALCULATION OF THE GEODETIC HEIGHTS OF THE CELESTIAL BODY'S SURFACE POINTS RELATIVE TO THE TRIAXIAL ELLIPSOID

M. E. Fleis, M. V. Nyrtsov, M. M. Borisov, A. I. Sokolov

Institute of Geography of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.M. Kotlyakov May 25, 2017

Received June 01, 2017

A sphere or ellipsoid of revolution are usually used for approximation of the physical surface of the Earth. In some cases a triaxial ellipsoid is used. The calculation of the geodetic height of points on the Earth's surface is carried out mainly by approximate methods using the formulas for the dependence of spatial rectangular coordinates x, y, z on geodesics B, L, H . However, there are small bodies of the Solar system, for example, Eros 433 asteroid, for which such variants of the first approximation are incorrect, since in this case both first approximations are not small quantities. This article proposes a fundamentally new approach to calculating the geodesic height relative to the triaxial ellipsoid, based on the joint use of the normal equation for a surface passing through a given point and the equations of the surface itself. The method is reduced to solving the sixth degree equation by the Sturm method and the fourth degree equation by the Ferrari method.

Keywords: triaxial ellipsoid, geodetic height, Sturm chain.