ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 5, с. 527–530

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ АЛЬФА-МОДЕЛИ ЛЕРЕ И АЛЬФА-МОДЕЛИ НАВЬЕ–СТОКСА

А. В. Звягин

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 29.01.2019 г.

Поступило 12.02.2019 г.

В настоящей работе устанавливается существование оптимального управления с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье–Стокса. Рассматривается управление внешними силами, которые зависят от скорости движения жидкости. Это позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление выбирается не из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения.

Ключевые слова: оптимальное управление с обратной связью, начально-граничная задача, альфа-модель, слабое решение.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524865527-530

В последние годы стали интенсивно изучаться альфа-модели гидродинамики (см. [1]). В отличие от исходных моделей они представляют собой своего рода регуляризованные приближённые системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α, причём регуляризация осуществляется путём некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена. Для описания альфа-моделей рассмотрим систему уравнений на $\Omega\times[0, T]$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ и $T>0$:

$$\partial_t v+\nu Av-PF(u,v)+g(x), \qquad \nabla\cdot v=0, \qquad (1)$$

$$v=(I+\alpha^2 A)u; \qquad \nabla\cdot u=0, \qquad (2)$$

в которой v, u — неизвестные вектор-функции, $\nu>0$ — коэффициент вязкости, $\alpha>0$ — скалярный параметр, P — проектор Лере, $A=-P\Delta$ — оператор Стокса и $F(u, v)$ — некоторый билинейный дифференциальный оператор 1-го порядка по u и v. В силу уравнения (2) векторное поле $u(t, x)$ однозначно определяется по $v(t, x)$.

Каждая альфа–модель (1), (2) характеризуется своим векторным дифференциальным оператором 1-го порядка $F(u, v) = F^1(u, v), \ldots, F^n(u, v))$, в котором компоненты $F^1(u, v)$ являются линейными комбинациями всевозможных операторов-мономов вида $u^k\partial_{x_j}v^n, v^k\partial_{x_j}u^n, u^k\partial_{x_j}u^n$:

$$F^i(u,v)=\sum_{k,j,n=1}^{n}C^i_{kjn}u^k\partial_{x_j}v^n+D^i_{kjn}v^k\partial_{x_j}u^n+ \\ +E^i_{kjn}u^k\partial_{x_j}u^n, \qquad (3)$$

где C^i_{kjn}, D^i_{kjn}, E^i_{kjn} — некоторые вещественные коэффициенты. Отметим, что в представлении (3) мономы вида $v^k\partial_{x_j}v^n$ не используются, так как они не содержат компонентов “сглаженного” векторного поля u.

Напомним, через $\mathcal{V}$ обозначается множество $\{v\in C_0^\infty(\Omega)^n, \operatorname{div}v=0\}$. Через V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$. Альфа-модели разделены на два класса, в зависимости от свойств ортогональности функции $F(u, v)$ к u или v в пространстве V^0:

$$\langle F(u,\ v),v\rangle=0 \qquad \forall u,\ v\in\mathcal{V} \quad (\text{класс I}),$$

$$\langle F(u,\ v),u\rangle=0 \qquad \forall u,\ v\in\mathcal{V} \quad (\text{класс II}).$$

Основными характерными примерами каждого класса являются альфа-модель Лере с нелинейным оператором $F(u, v) = (u\cdot\nabla)v$ (см. [2, 3]) и альфа-модель Навье–Стокса с нелинейным оператором $F(u, v) = -u\cdot(\nabla\cdot v)$ (см. [4]). В данной работе рассматривается задача оптимального управления с об-

Воронежский государственный университет
E-mail: zvyagin@mail.ru

ратной связью (см. [5, 6]) для альфа-моделей гидродинамики на примере альфа-модели Лере и альфа-модели Навье–Стокса.

1. АЛЬФА-МОДЕЛЬ ЛЕРЕ

Рассмотрим начально-краевую задачу для несжимаемых сред, удовлетворяющих I классу альфа-моделей (1), (2), для альфа-модели Лере:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i}-\nu\Delta v+\nabla p=f; \tag{4}$$

$$u=(I-\alpha^2\Delta)^{-1}v; \qquad \operatorname{div} v=0; \quad v|_{t=0}=v_0; \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0. \tag{5}$$

Приведём функциональные пространства, необходимые для формулировки основного результата. Через V^1 обозначим замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ и $V^2=W_2^2(\Omega)\cap V^1$. Рассмотрим шкалу пространств V^β, $\beta\in\mathbb{R}$ (см. [7]). Для этого рассмотрим оператор Стокса A, определённый на V^2. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряжённым положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_k\le\ldots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через $E_\infty=\left\{v=\sum_{j=1}^{N} v_j e_j\colon v_j\in\mathbb{R},\ N\in\mathbb{N}\right\}$, множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta\in\mathbb{R}$, как пополнение E_μ по норме $\|v\|_{V^\beta}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\beta |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, где $v=\sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k$.

В [7] показано, что на пространстве V^β, $\beta>\frac{1}{2}$, норма $\|\cdot\|_{V^\beta}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H^\beta(\Omega)}$ пространства $H^\beta(\Omega)$. Далее, через $V^{-\beta}=(V^\beta)^*$, $\beta\in\mathbb{N}$, мы будем обозначать сопряжённое пространство к V^β.

Обозначим через Δ_α: $V^3\to V^1$ оператор $\Delta_\alpha=(PI+\alpha^2A)$. В силу [8] оператор Δ_α обратим. Применим проектор Лере P: $L_2(\Omega)\to V^0$ к обеим частям равенства $v=(I-\alpha^2\Delta)u$ и выразим из последнего равенства u: $u=(J+\alpha^2A)^{-1}v=\Delta_\alpha^{-1}v$. Так как $v(t)\in V^1$, получим, что $u(t)\in V^3$ при п.в. $t\in[0,T]$.

Введём пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи: $W=\left\{v\in L_2(0,T;V^1)\cap L_\infty(0,T;V^0),\ v'\in L_{4/3}(0,T;V^{-1})\right\}$ с нормой $\|v\|_W=\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}+\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)}+\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Рассмотрим многозначное отображение Ψ: $W\multimap L_2(0,T;V^{-1})$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено;

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty\subset W$, $v_1\to v_0$, $w_1\in\Psi(v_1)$ и $w_1\to w_0$ в $L_2(0,T;V^0)$, тогда $w_0\in\Psi(v_0)$.

Будем предполагать, что внешние силы (управление) принадлежат образу некоторого мультиотображения, которое зависит от скорости жидкости:

$$f\in\Psi(v). \tag{6}$$

Сформулируем определение слабого решения задачи управления с обратной связью для альфа-модели Лере (4)–(6).

Определение 1. Пара $(v,f)\in W\times L_2(0,T;V^{-1})$ называется *слабым решением задачи управления для альфа-модели Лере* (4)–(6), если для всех $\varphi\in V^1$ при почти всех $t\in(0,T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v',\varphi\rangle-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha v)_i v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi dx=\langle f,\varphi\rangle,$$

условию обратной связи (6) и начальному условию $v(0)=v_0$.

Для данной задачи управления альфа-модели Лере (4)–(6) изучается вопрос существования слабых решений, дающих минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. Одним из важных является следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $v_0\in V^1$ и пусть отображение Ψ удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда задача управления с обратной связью для альфа-модели Лере* (4)–(6) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v,f).

Обозначим через $\Sigma\subset W\times L_2(0,T;V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью для альфа-модели Лере (4)–(6). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi:\Sigma\to\mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Ф1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f)\geq\gamma$ для всех $(v,f)\in\Sigma$.

(Ф2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m\to f_*$ в $L_2(0,\,T;\,V^{-1})$, то $\Phi(v_*,\,f_*)\leq \varliminf_{m\to\infty}\Phi(v_m,\,f_m)$.

Основным результатом для задачи управления с обратной связью для альфа-модели Лере является следующая

Теорема 2. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Ф1), (Ф2), *тогда задача оптимального управления с обратной связью для альфа-модели Лере* (4)–(6) *имеет хотя бы одно слабое решение* $(v_*,\,f_*)$ *такое, что*

$$\Phi(v_*,\,f_*)=\inf_{(v,f)\in\Sigma}\Phi(v,\,f).$$

2. АЛЬФА-МОДЕЛЬ НАВЬЕ–СТОКСА

Рассмотрим начально-краевую задачу для несжимаемых сред, удовлетворяющих II классу альфа-моделей (1), (2), для альфа-модели Навье–Стокса:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}u_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}v_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-\nu\Delta v+\nabla p=f; \tag{7}$$

$$u=(I-\alpha^2\Delta)^{-1}v;\qquad \operatorname{div}v=0;\qquad v|_{t=0}=v_0;\qquad v|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0. \tag{8}$$

Введём пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи: $W = \left\{v\in L_2(0,\,T;\,V^0)\cap L_\infty(0,\,T;\,V^1),\ v'\in L_2(0,\,T;\,V^{-2})\right\}$ с нормой $\|v\|_W=\|v\|_{L_2(0,\,T;\,V^0)}+\|v\|_{L_\infty(0,\,T;\,V^1)}+\|v'\|_{L_2(0,\,T;\,V^{-2})}$.

Рассмотрим многозначное отображение Ψ: $W\multimap L_2(0,T;\,V^{-2})$ в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ также удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Также будем предполагать, что внешние силы (управление) также принадлежит образу некоторого мультиотображения, которое зависит от скорости жидкости:

$$f\in\Psi(v). \tag{9}$$

Сформулируем определение слабого решения задачи управления для альфа-модели Навье–Стокса (7)–(9).

Определение 2. Пара $(v,f)\in W\times L_2(0,\,T;\,V^{-2})$ называется слабым решением задачи управления для альфа-модели Навье–Стокса (7)–(9), если для всех $\varphi\in V^2$ при почти всех $t\in(0,\,T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v',\varphi\rangle+\nu\int_\Omega\nabla v:\nabla\varphi dx-$$
$$-\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta_\alpha v)_i v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{n}v_i\frac{\partial(\Delta_\alpha v)_j}{\partial x_i}\varphi_j\,dx=\langle f,\varphi\rangle,$$

условию обратной связи (9) и начальному условию $v(0)=v_0$.

Для данной задачи управления для альфа-модели Навье–Стокса изучается вопрос существования слабых решений, дающих минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. Одним из важных является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $v_0\in V^1$ *и пусть отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда задача управления с обратной связью для альфа-модели Навье–Стокса* (7)–(9) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v,f).

Обозначим через $\Sigma\subset W\times L_2(0,\,T;\,V^{-2})$ множество всех слабых решений задачи управления с обратной связью для альфа-модели Навье–Стокса (7)–(9). Рассмотрим произвольный функционал качества Φ: $\Sigma\to\mathbb{R}$, также удовлетворяющий условиям (Ф1), (Ф2). Основным результатом для альфа-модели Навье–Стокса является следующая

Теорема 4. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Ф1), (Ф2), *тогда задача оптимального управления с обратной связью для альфа-модели Навье–Стокса* (7)–(9) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*,f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*,\,f_*)=\inf_{(v,f)\in\Sigma}\Phi(v,\,f).$$

Доказательство теорем 1 и 3 основано на аппроксимационно-топологическом методе исследования задач гидродинамики (см. монографию [8], обзорную статью [9], а также применение этого метода в задачах оптимального управления [10–12]). Для этого сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи (операторному включению) в подходящих функциональных пространствах. Далее, в связи с тем, что зачастую операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (обычно это тоже операторное включение, но с операторами, обладающими требуемыми свойствами, и в более лучших функциональных пространствах). После чего на основе априорных оценок решений и теории степени многозначных векторных полей доказывается существование решения аппроксимационной задачи. И, наконец, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в некотором смысле к решению исходного операторного включения. После доказательства разрешимости задачи управления движением жидкости показывается, что в множестве решений найдётся хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью). Это и завершает доказательства теорем 2 и 4.

Источникb финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14. Z50.31.0037) и гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных (МК-2213.2018.1, соглашение 075-02-2018-339).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lemarie-Rieusset P.G.* // The Naviez–Stokes Problem in the 21st Century. CRC Press / Taylor and Francis Group, 2016.
2. *Cheskidov B.B., Holm D.D., Olson E., Titi E.S.* // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2005. V. 461. P. 629–649.
3. *Звягин А.В.* // Изв. вузов. Мат. 2016. № 10. С. 70–75.
4. *Foias C., Holm D.D., Titi E.S.* // J. Dyn. Different. Equat. 2002. V. 14. N. 1. P. 1–35.
5. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* // JFPTA. 2014. V. 16. P. 27–82.
6. *Zvyagin V.G., Turbin M.V.* // JOTA. 2011. V. 148. P. 146–163.
7. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Новосибирск: Научн. кн., 1999.
8. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД УРСС, 2012.
9. *Zvyagin V.G.* // J. Math. Sci. 2014. V. 201. P. 830–858.
10. *Звягин А.В.* // ДАН. 2016. Т. 468. № 3. С. 251–253.
11. *Звягин А.В.* // Диференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
12. *Звягин А В.* // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 4. С. 807–825.

OPTIMAL FEEDBACK CONTROL FOR ALPHA-LERAY MODEL AND FOR ALPHA-NAVIER–STOKES MODEL

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin January 29, 2019

Received February 12, 2019

The existence of optimal feedback control for the alpha-Leray model and for the alpha-Navier–Stokes model are proved. The existence of an optimal solution yielding the minimum of a specified bounded lower semicontinuous quality functional is obtained. To establish the existence of an optimal solution, the topological approximation method for studying problems of hydrodynamics is used.

Keywords: optimal feedback control, initial boundary value problem, alpha-model, weak solution.