ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 5, с. 547–553

МЕХАНИКА

УДК 531.36: 531.53

О СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МАЯТНИКА НА ПОДВИЖНОЙ ПЛАТФОРМЕ

А. П. Маркеев

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 12.02.2019 г.

Поступило 12.02.2019 г.

Исследуется движение маятника на вращающейся платформе при наличии возмущений, вызванных её вертикальными гармоническими колебаниями малой амплитуды. Параметры невозмущённой системы считаются близкими к значениям, при переходе через которые изменяется число относительных равновесий маятника и характер их устойчивости. Решена нелинейная задача о существовании и устойчивости периодических движений маятника относительно платформы с периодом, кратным периоду её вертикальных колебаний. Рассмотрен также вопрос о расщеплении сепаратрис невозмущённой системы.

Ключевые слова: маятник, вибрации, сепаратрисы, устойчивость.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524865547-553

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим маятник, движущийся в однородном поле тяжести. Маятник представляет собой материальную точку весом mg, закреплённую на одном из концов невесомого стержня длиной ℓ. Другой конец стержня шарнирно соединён с вертикальным валом, установленным на подвижной платформе. Платформа вращается вокруг вертикали, на которой расположен вал, с постоянной угловой скоростью ω и при этом ещё совершает гармонические колебания вдоль вертикали с частотой Ω и амплитудой A.

Пусть q — угол между стержнем маятника и нисходящей вертикалью, а $\xi = \omega t$ — независимая переменная. Уравнения движения можно записать в канонической форме с функцией Гамильтона вида

$$\Gamma = \frac{1}{2}p^2 - (\alpha + \varepsilon b^2 \cos\tau)\cos q + \frac{1}{4}\cos 2q, \qquad (1)$$

$$\alpha = \frac{g}{\omega^2 \ell}, \quad \varepsilon = \frac{A}{\ell}, \quad b = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \tau = \Omega t. \qquad (2)$$

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

E-mail: anat-markeev@mail.ru

При $\varepsilon = 0$ приходим к хорошо известной [1] задаче о движении маятника на вращающейся платформе. Здесь значение параметра $\alpha = 1$ является бифуркационным: при переходе α через единицу происходит изменение числа положений относительного равновесия маятника и характера их устойчивости.

При $\varepsilon \neq 0$ представляют интерес периодические движения маятника относительно платформы. Случай, когда период этих движений равен $2\pi/\Omega$, исследовался в работах [2–4]. Движения с периодом, кратным $2\pi/\Omega$, рождающиеся при малых ε из устойчивого равновесия $q = \arccos\alpha$ (отвечающего основному режиму работы технических устройств типа регулятора Уатта), изучались для случая быстрых колебаний платформы [5].

В работе исследована задача о существовании и устойчивости периодических движений маятника с периодом, кратным $2\pi/\Omega$. Амплитуда вертикальных колебаний платформы предполагается малой по сравнению с длиной маятника ($0 < \varepsilon \ll 1$), частота колебаний Ω произвольна, а параметр α считается близким его бифуркационному значению ($\alpha = 1 + \varepsilon\delta$, где δ — величина порядка единицы). Исследование проводится при помощи классических и современных методов нелинейной динамики [6–12].

НЕВОЗМУЩЁННЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Функцию Гамильтона (1) можно представить в виде

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \tag{3}$$

$$H_0 = \frac{1}{2}p^2 - \cos q + \frac{1}{4}\cos 2q, \tag{4}$$

$$H_1 = -(\delta + b^2\cos\tau)\cos q.$$

Невозмущенная система (когда $\varepsilon = 0$) допускает интеграл энергии $H_0 = h$. Фазовый портрет невозмущённой системы показан на рис. 1. В положении равновесия $p = 0$, $q = 0$, отвечающем устойчивому висящему маятнику, $h = -3/4$. В положении равновесия $p = 0$, $q = \pi$ (или $p = 0$, $q = -\pi$, что физически одно и то же), отвечающем неустойчивому опрокинутому маятнику, имеем $h = 5/4$. При $-3/4 < h < 5/4$ маятник совершает периодические колебания в окрестности равновесия $q = 0$ с амплитудой q_0. При $h > 5/4$ маятник находится в режиме вращения. Сепаратрисы соединяют неустойчивые седловые точки $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$ и разделяют на фазовой плоскости области колебаний и вращений, на сепаратрисах $h = 5/4$. Дадим более подробное аналитическое описание невозмущённых движений.

Область колебаний ($-3/4 < h < 5/4$). В случае колебаний и вращений будем использовать переменные действие — угол I, w [7, 13]. Опуская громоздкие вычисления, приведём только их окончательные результаты. В случае колебаний переменные I, w вводятся при помощи унивалентного канонического преобразования $q, p \to w, I$, задаваемого равенствами

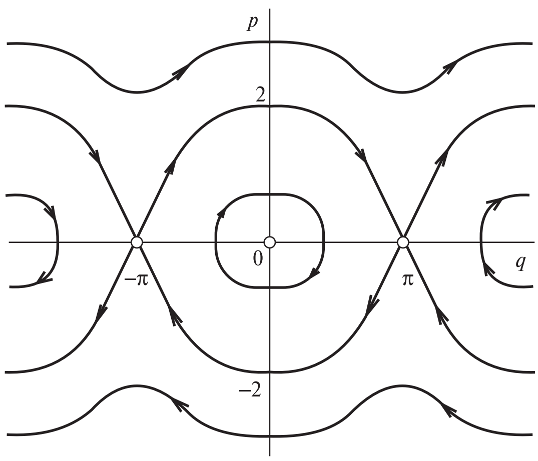

Рис. 1. Фазовый портрет невозмущённой системы.

$$\sin\frac{q}{2} = \frac{\sqrt{2k^2-1}\,sn(u,k)}{\sqrt{1+cn^2(u,k)}}, \quad p = \frac{4\left(2k^2-1\right)cn(u,k)}{1+cn^2(u,k)},$$

$$u = \frac{2K(k)}{\pi}w, \tag{5}$$

$$I = \frac{2\sqrt{2\left(2k^2-1\right)}}{\pi}\times$$
$$\times\left[2E(k) + 2\left(2k^2-1\right)K(k) - \Pi(1/2,k)\right], \tag{6}$$

$$h = 8k^4 - 8k^2 + \frac{5}{4} = 2\sin^4\frac{q_0}{2} - \frac{3}{4}, \tag{7}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < k < 1.$$

Здесь и далее используются стандартные обозначения для эллиптических функций и интегралов [14].

Из (6) можно найти выражение для производной величины k по I:

$$\frac{\partial k}{\partial I} = \frac{\sqrt{2}\pi}{32k\sqrt{2k^2-1}K(k)}. \tag{8}$$

Так как эта производная отлична от нуля, то равенство (6) разрешимо относительно функции $k = k(I)$. Подстановка этой функции в (7) дает возможность выразить функцию H_0 из (4) через переменную I: $H_0 = h(I)$.

Частота λ нелинейных колебаний находится из (7), (8):

$$\lambda = \frac{\partial h}{\partial I} = \frac{\partial h}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial I} = \frac{\sqrt{2\left(2k^2-1\right)}\pi}{2K(k)}. \tag{9}$$

Колебания невозмущённой системы задаются равенствами

$$I = I_0, \quad w = \lambda\xi + w_0 \quad (I_0, w_0 \text{ — постоянные}). \tag{10}$$

В случае колебаний в окрестности положения равновесия ($0 < q_0 \ll 1$) и вблизи сепаратрис ($0 < \pi - q_0 \ll 1$) частота (9) принимает значения, близкие к нулю. В этих случаях соответственно имеем

$$\lambda \cong \frac{\sqrt{2}\pi}{4K\left(\sqrt{2}/2\right)}q_0 \ \text{ и } \ \lambda \cong -\frac{\sqrt{2}\pi}{2\ln\left(\pi - q_0\right)}.$$

При $0 < q_0 < \pi$ функция $\lambda(q_0)$ имеет максимум $\lambda^* = 0{,}7786$, который достигается при $q_0 = q_0^* = 2{,}0342 = 116°30'$. График функции λ показан на рис. 2.

Точка $q_0 = q_0^*$ является единственной точкой вырождения невозмущенной системы в области колебаний, в этой точке обращается в нуль величина

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial I} = \\ = \frac{(1-k^2)(4k^2-1)K(k)-(2k^2-1)E(k)}{32k^2(1-k^2)(2k^2-1)K^3(k)}\pi^2. \quad (11)$$

График функции (11) представлен на рис. 2. При $0 < q_0 < q_0^*$ величина (11) положительна, а при $q_0^* < q_0 < \pi$ отрицательна.

Область вращений ($h > 5/4$). Рассмотрим вращения при $p > 0$ (случай $p < 0$ рассматривается аналогично). Переменные I, w вводятся соотношениями

$$\cos q = 1 - 2\frac{k\left[dn(u,k) - cn(u,k)\right]}{a^2\left[dn(u,k) - k^2 cn(u,k)\right]},$$

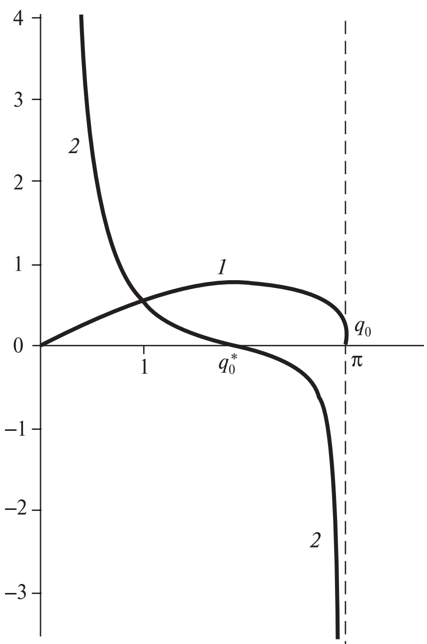

Рис. 2. Частота нелинейных колебаний (9) и выражение (11) как функции амплитуды колебаний q_0. *1* — функция $\lambda(q_0)$; *2* — функция $\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} q_0$; $q_0^* = 116°30'$.

$$p = \frac{2\left(1-k^2\right)}{a^2\left[dn(u,k) - k^2 cn(u,k)\right]}, \quad u = \frac{2K(k)}{\pi} w, \quad (12)$$

$$I = \frac{2\sqrt{1+a^2}}{\pi a^2}\left[E(\gamma) + K(\gamma) - \beta^2 \Pi\left(\beta^2, \gamma\right)\right],$$

$$\gamma = \sqrt{2}\beta, \quad \beta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \quad (13)$$

$$a = \frac{2}{\sqrt[4]{2(3+4h)}}, \quad k = \frac{\left(\sqrt{1+a^2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2}{2a^2}, \quad (14)$$

$$0 < a < 1, \quad 0 < k < 1.$$

Функция $H_0 = h(I)$ определяется из равенств (13) и (14).

В переменных I, w вращения маятника описываются формулами вида (10), в которых

$$\lambda = \frac{\partial h}{\partial I} = \frac{\pi\chi}{2K(k)}, \quad \chi = \frac{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-a^4}\right)}}{a^2}. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что в области $h > 5/4$ частота вращений λ — монотонно возрастающая функция h. Вблизи сепаратрисы величина λ близка к нулю:

$$\lambda \cong -\frac{2\sqrt{2}\pi}{\ln(h - 5/4)},$$

а при $h \to \infty$ имеем $\lambda \cong \sqrt{2h}$.

Вычисления показывают, что функция

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \lambda\frac{\partial \lambda}{\partial h} = \frac{\pi^2\chi}{4K^3(k)}\left(K\frac{\partial \chi}{\partial a} - \chi\frac{\partial K}{\partial a}\right)\frac{\partial a}{\partial h} \quad (16)$$

не обращается в нуль (она больше 1). Поэтому условие невырожденности $\partial^2 H_0 / \partial I^2 \neq 0$ выполнено всюду в рассматриваемой области $h > 5/4$.

Случай сепаратрис ($h = 5/4$). Решение уравнений невозмущённой системы выражается здесь через гиперболические функции:

$$q = \pm 2\arcsin\frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\nu\right)}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{2}\nu\right)}},$$

$$p = \pm \frac{4\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\nu\right)}{1+\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{2}\nu\right)}, \tag{17}$$

где $v = \xi - æ$, а æ — произвольная постоянная, задающая сдвиг вдоль траектории, отвечающей сепаратрисе. Верхний и нижний знаки в равенствах (17) относятся соответственно к сепаратрисе, лежащей в области положительных и отрицательных значений p.

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ

Если значения переменной действие $I = I_0$ и параметра b из (2) таковы, что выполняется равенство $m\lambda=nb$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, то движение (10) невозмущённой системы будет периодическим по τ с периодом $2\pi m/n$.

Следуя [6], рассмотрим задачу о существовании и устойчивости периодических движений в полной системе с функцией Гамильтона (3). Для этого вычислим среднее значение $\langle H_1\rangle$ функции H_1 на невозмущённом движении. Если $n \neq 1$, то $\langle H_1\rangle = -\delta\langle\cos q\rangle$ и не зависит от w_0, если же $n = 1$, то

$$\langle H_1\rangle = -\delta\ \langle\cos q\rangle - 1/2\ b^2\ a_m \cos m w_0, \tag{18}$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos q \cos m w\, dw. \tag{19}$$

Здесь $\cos q$ — 2π-периодическая функция w, определяемая формулами (5) в области колебаний и формулами (12) в области вращений. Коэффициент Фурье a_m этой функции зависит от величины I_0 определяемой уравнением

$$b = m\lambda. \tag{20}$$

Если $a_m \neq 0$, то уравнение $\partial\langle H_1\rangle/\partial w_0 = 0$ при $0 \le w_0 < 2\pi$ имеет $2m$ корней: $w_0 = r\pi/m$ $(r = 0, 1, \ldots, 2m-1)$. Для этих значений w_0 производная $\partial^2\langle H_1\rangle/\partial w_0^2 \neq 0$. Поэтому [6] при выполнении условия $\partial^2 H_0/\partial I_0^2 \neq 0$ в полной системе при достаточно малых ε существуют $2m$ аналитических по ε движений периода $2\pi m$ по τ, которые при $\varepsilon = 0$ переходят в порождающие движения

$$I = I_0,\ \ w = \frac{1}{m}\tau + r\frac{\pi}{m},\ \ r = 0, 1, \ldots, 2m-1. \tag{21}$$

На движениях (21) имеем

$$\chi_1 = \frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial w_0^2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_0^2} = (-1)^r\frac{1}{2}b^2 m^2 a_m \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_0^2},$$

$$\chi_2 = 5\left(\frac{\partial^3\langle H_1\rangle}{\partial w_0^3}\right)^2 - 3\frac{\partial^2\langle H_1\rangle}{\partial w_0^2}\frac{\partial^4\langle H_1\rangle}{\partial w_0^4} = \frac{3}{4}b^4 m^6 a_m^2.$$

Если $\chi_1 < 0$, то $2\pi m$-периодическое движение полной системы неустойчиво, а при $\chi_1 > 0$ оно устойчиво в первом приближении [6]. Так как $\chi_2 \neq 0$, то в последнем случае периодическое движение устойчиво по Ляпунову (в строгой нелинейной постановке задачи) [12].

Таким образом, условия устойчивости и неустойчивости зависят от знака величины $a_m\ \partial^2 H_0/\partial I_0^2$ и чётности или нечётности числа r в (21). Условия устойчивости задаются неравенством

$$(-1)^r a_m \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_0^2} > 0,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad r = 1, 2, \ldots, 2m - 1. \tag{22}$$

При обратном знаке в этом неравенстве имеет место неустойчивость.

Для более подробного описания результатов исследования рассмотрим отдельно область колебаний и область вращений невозмущённой системы. Целое число r в условии (22) считаем чётным. Получаемые при чётном r выводы об устойчивости (или неустойчивости) меняются при нечётном r на выводы о неустойчивости (или устойчивости).

Область колебаний ($-3/4 < h < 5/4$). Можно показать, что коэффициент Фурье (19) может быть отличным от нуля только для чётных m. При помощи весьма трудоемких вычислений для него было найдено явное выражение:

$$a_{2s} = \frac{2\pi\sqrt{2\left(2k^2-1\right)}}{K}\ \frac{\sin\left(\dfrac{s\pi d}{K}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{s\pi K'}{K}\right)}, \tag{23}$$

где k определяется равенством (7), а d соотношением $\sqrt{2}k\ sn(d, k) = 1$.

Из (23) видно, что знак коэффициента a_{2s} совпадает со знаком величины $\sin(s\pi d/K)$. Расчёты показывают, что в интервале $0 < q_0 < \pi$ выполняется неравенство $0 < d/K < 1$, поэтому число корней уравнения $a_{2s} = 0$ в этом интервале равняется $s - 1$.

При малых q_0 и при q_0, близких к π, имеем соответственно

$$\sin\left(\frac{s\pi d}{K}\right) \cong -(-1)^s \frac{\sqrt{2}\pi}{2K(\sqrt{2}/2)}$$

$$\text{и} \quad \sin\left(\frac{s\pi d}{K}\right) \cong -s\pi \frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\ln(\pi - q_0)}.$$

Учитывая, что (см. рис. 2) при малых q_0 величина $\partial^2 H_0 / \partial I_0^2$ положительна, а при q_0, близких к π, отрицательна, получаем отсюда, что при малых q_0 изучаемые субгармонические колебания устойчивы при нечётных s и неустойчивы при чётных s, а если значения q_0 близки к π, то имеет место неустойчивость при любых s. (Напомним, что число r в (22) мы считаем чётным; при нечётном r выводы об устойчивости будут противоположными.)

На рис. 3 показаны кривые (20) для $m = 2, 4, 6, 8$. Участки кривых, отвечающие устойчивым и неустойчивым $2\pi m$—периодическим по τ колебаниям маятника, отмечены соответственно сплошными и штриховыми линиями.

Область вращений ($h > 5/4$). Для коэффициента (19) можно получить выражение

$$a_m = \frac{2\pi}{a^2\sqrt{1+k^2}K} \frac{\sin\left(\dfrac{m\pi e}{2K}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{m\pi K'}{2K}\right)}, \tag{24}$$

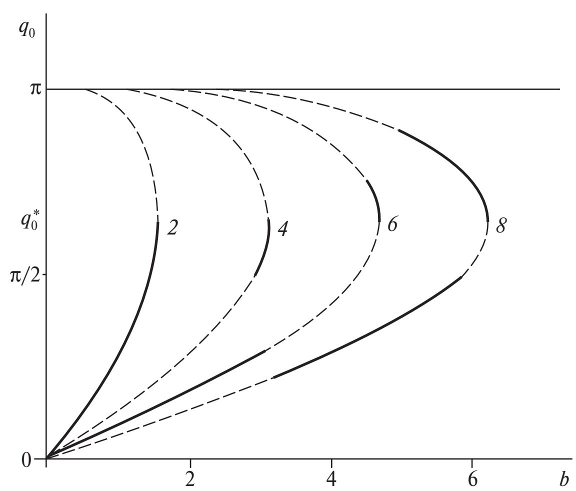

Рис. 3. Кривые $b=m\lambda$ при $\frac{-3}{4} < h < \frac{5}{4}$. Номер у кривой указывает значение m. Сплошные участки кривых отвечают устойчивыми, а штриховые — неустойчивым субгармоническим движениям.

где k определяется равенствами (14), а e — соотношением $\sqrt{1+k^2}sn(e,k) = 1$. Знак a_m совпадает со знаком функции $\sin(m\pi e/(2K))$. Можно показать, что в интервале $0 < a < 1$ (т.е. при $h > 5/4$) имеем $0 < e/2K < 1/2$, поэтому число корней уравнения $a_m = 0$ не превосходит $m/2$.

Вблизи сепаратрисы (когда $a \to 1$, или, что то же, когда $h \to 5/4$) справедлива оценка

$$\sin\left(\frac{m\pi e}{2K}\right) \cong -2m\pi \frac{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{\ln(1-a)} > 0.$$

Учитывая, что при $h > 5/4$ имеет место неравенство $\partial^2 H_0 / \partial I_0^2 > 0$, получаем, что на кривых $b = m\lambda$ при $a \to 1$ субгармонические движения устойчивы для любых m.

В случае $a \to 1$ (когда $h \to \infty$) имеем

$$\sin\left(\frac{m\pi e}{2K}\right) \cong \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{m}{2}\cos\left(\frac{m\pi}{2}\right)a^2.$$

Поэтому устойчивыми будут субгармонические движения, для которых $m = 1 + 4\sigma$ или $m = 2 + 4\sigma$ ($\sigma = 0, 1, 2, ...$), а если $m = 3 + 4\sigma$ или $m = 4 + 4\sigma$, то субгармонические движения неустойчивы.

На рис. 4 в плоскости b, a показаны кривые (20) для $m = 1, 2, 3, 4$. Кривые имеют общую горизонтальную асимптоту $a = 0$. Участки устойчивости

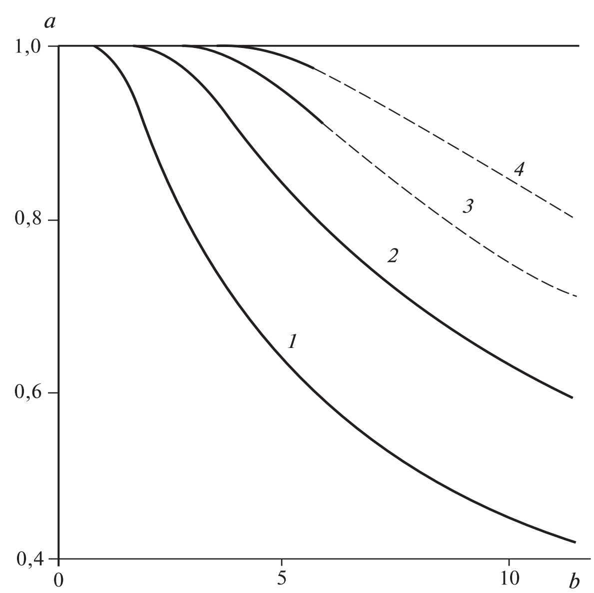

Рис. 4. Кривые $b = m\lambda$ при $h > \frac{5}{4}$. Номер у кривой указывает значение m. Сплошные участки кривых отвечают устойчивым, а штриховые — неустойчивым субгармоническим движениям.

изображены сплошными, а участки неустойчивости — штриховыми линиями.

Отметим, что и в области колебаний, и в области вращений малое отличие $\varepsilon\delta$ параметра α от его бифуркационного значения не повлияло на факт существования субгармонических движений и свойства их устойчивости.

О РАСЩЕПЛЕНИИ СЕПАРАТРИС

Пусть (H_0, H_1) — скобка Пуассона функций H_0 и H_1 из (4). На обеих сепаратрисах (17) невозмущённой системы она имеет одно и то же выражение:

$$\left(H_0, H_1\right) = -4\sqrt{2}\left(\delta + b^2\cos\tau\right)\frac{\operatorname{sh}\left(2\sqrt{2}\nu\right)}{\left[1+\operatorname{ch}^2\left(\sqrt{2}\nu\right)\right]^2}$$

$$(\tau = b\xi,\ \ \nu = \xi - æ). \qquad (25)$$

Следуя [8, 15], рассмотрим периодическую функцию $J(\kappa)$, определяемую равенством

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(H_0,\ H_1\right)d\xi.$$

Для нее можно получить следующее аналитическое представление:

$$J(æ) = f(b)\sin(bæ),$$

$$f(b) = \frac{2\pi b^3}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\pi b/4\right)}\ \sin\left(\frac{\sqrt{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}b\right).$$

Пусть параметр b таков, что $f(b) \neq 0$. Тогда функция $J(æ)$ обращается в нуль только при таких значениях κ, для которых величина $bæ/\pi$ — целое число; при этом $dJ/dæ \neq 0$. Следовательно [9–11], при $0 < \varepsilon \ll 1$ каждая из сдвоенных сепаратрис (17) расщепляется, а образующиеся в результате расщепления сепаратрисы трансверсально пересекаются. Это приводит к появлению бесконечного числа пар изолированных субгармонических движений большого периода. Одна половина таких движений устойчива по Ляпунову, а другая неустойчива. Некоторые из этих движений рассмотрены в предыдущих разделах работы.

Источники финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ регистрации АААА–А17–117021310382–5) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00123).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. *Маркеев А.П.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 4. С. 415–420.
3. *Маркеев А.П.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 5. С. 542–546.
4. *Маркеев А.П., Сухоручкин Д.А.* // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. В. 2. С. 240–251.
5. *Маркеев А.П.* // ДАН. 2018. Т. 482. № 6. С. 661–665.
6. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. В кн.: Избранные труды. М: Наука, 1971. Т. 1. 771 с.
7. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 416 с.
8. *Козлов В.В.* // УМН. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.
9. *Козлов В.В.* // УМН. 1986. Т. 41. В. 5. С. 177–178.
10. *Козлов В.В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. гос. ун-та, 1995. 432 с.
11. *Козлов В.В.* Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 256 с.
12. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 396 с.
13. *Борн М.* Лекции по атомной механике. Харьков: ОНТИ, 1934. Т. 1. 312 с.
14. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
15. *Мельников В.К.* // Тр. ММО. 1963. Т. 12. С. 3–52.

ON SUBHARMONIC MOTIONS OF A PENDULUM IN A MOVABLE PLATFORM

A. P. Markeev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov February 12, 2019

Received February 12, 2019

The motion of a pendulum on a rotating platform is investigated in the presence of disturbances caused by its vertical harmonic oscillations of small amplitude. The parameters of the unperturbed system are considered close to the values, upon passing through which the number of relative equilibria of the pendulum and the nature of their stability change. The non-linear problem of the existence and stability of periodic motions of the pendulum relative to the platform with a period multiple to the period of its vertical oscillations is solved. The question of the splitting of separatrices of the unperturbed system is also considered.

Keywords: pendulum, vibrations, separatrices, stability.