*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК*, *2019*, *том 486*, *№ 6*, *с. 653–658*

МАТЕМАТИКА

*УДК 517.972*

# РАНДОМИЗИРОВАННАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

**Ю. Н. Орлов[1], В. Ж. Сакбаев[2,*], О. Г. Смолянов[2,3]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.01.2019 г.

Поступило 19.03.2019 г.

Рандомизированной называется гамильтонова механика, порождаемая функциями Гамильтона, являющимися случайными функциями времени; соответствующие гамильтоновы системы называются случайными. Приведены формулы Фейнмана для случайных гамильтоновых систем и показано, что они представляют решения уравнений Гамильтона с усреднённой функцией Гамильтона; аналогичные результаты получены и для квантовых систем (являющихся, как известно, бесконечномерными гамильтоновыми системами). Такие случайные квантовые гамильтонианы существуют среди гамильтонианов открытых квантовых систем.

*Ключевые слова:* гамильтонова система, формула Фейнмана, рандомизация, случайный гамильтониан, случайная полугруппа отображений.

**DOI:** https://doi.org/10.31857/S0869-56524866653-658

Для электрона, пребывающего в электронной оболочке радиактивного атома, роль оператора Гамильтона играет случайный процесс со значениями в множестве самосопряжённых операторов, который определяется как состоянием ядра атома, так и переходами между уровнями в электронной оболочке.

1. Терминология и обозначения. Далее используются некоторые определения из [1] и [2]. Если $E$ — локально выпуклое пространство (ЛВП), то символом $C^1(E)$ обозначается векторное пространство один раз непрерывно дифференцируемых по Адамару числовых функций на $E$, наделённое топологией компактной сходимости функций и их производных. Симплектическим пространством называется пара $(E,I)$, где $E$ — ЛВП и $I$ — такое линейное непрерывное отображение сопряжённого к $E$ пространства $E'$ в $E$, для которого $I^* = -I$; при этом предполагается, что пространство $E'$ наделено топологией, согласующейся с двойственностью между $E'$ и $E$. Гамильтонова система — это набор $(E,I,\mathcal{H})$, где $(E,I)$ — симплектическое пространство, называемое фазовым пространством гамильтоновой системы (фазовым называется и само пространство $E$), и $\mathcal{H}$ — функция из $C^1(E)$, называемая функцией Гамильтона. Квантовая система — это пара $(\mathbb{H},H)$, где $\mathbb{H}$— это комплексное сепарабельное гильбертово пространство, называемое гильбертовым пространством квантовой системы, а $H$ — положительно определённый самосопряжённый оператор в $\mathbb{H}$, называемый оператором Гамильтона.

Уравнением Гамильтона для гамильтоновой системы $(E,I,\mathcal{H})$ называется уравнение $f'(t) = I\mathcal{H}'(f(t))$ относительно функции $f$ вещественного аргумента, принимающей значения в $E$. Если $f$ и $g$ — числовые функции на фазовом пространстве $E$, то их скобка Пуассона — это функция на $E$, обозначаемая символом $\{f,g\}$ и задаваемая равенством $\{f,g\}(x) = f'(x)(I(g'(x))$. Иначе говоря, $\{f,g\}$ — это производная функции $f$ вдоль гамильтонова векторного поля $h_g$ на $E$, задаваемого функцией $g$ (оно определяется равенством $h_g(x) = I(g'(x))$).

Символом $M(R,C^1(E))$ обозначается линейное пространство отображений вещественной прямой $R$ в пространство $C^1(E)$. Пусть $\tau_s$ — самая слабая среди всех топологий на пространстве $M(R,C^1(E))$, относительно которой непрерывны все функционалы $\Phi_{T,K}$, $T>0$, $K\in c(E)$, задаваемые посредством равенств $\Phi_{T,K}(u) = \sup\limits_{t\in[-T,T]} \| u(t)\,|_K\|_{C^1(K)}$. Для каждого топологического пространства $E$ символом $c(E)$ обозначим множество всех его компактных подмножеств. Пусть $A_s$ — борелевская $\sigma$-алгебра подмножеств хаусдорфова топологического пространства $(M(R,C^1(E)),\ \tau_s)$.

[1] *Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва*

[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Московская обл.*

[3] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[*] *E-mail: fumi2003@mail.ru*

Случайной функцией Гамильтона $H$ на фазовом пространстве $E$ будем называть измеримую функцию, определённую на некотором вероятностном пространстве $\Omega$ и принимающую значения в пространстве $M(R_+, C^1(E))$.

Пусть для каждого $T > 0$ $R_+ = [0,+\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[(k-1)T,\ kT),\ k \in \mathbf{N}$. Пусть при каждом $\omega \in \Omega$ функция $H(\omega)$ постоянна на каждом из промежутков $[(k-1)T,\ kT)$. При этом предполагается, что значения случайной функции гамильтона $H$ на каждом из промежутков являются независимыми случайными величинами (со значениями в пространстве $C_1(E)$).

Динамика такой случайной гамильтоновой системы фактически представляет собой композицию независимых случайных гамильтоновых потоков, задаваемых случайной функцией Гамильтона $h_k$ на каждом из промежутков $[(k-1)T,\ kT),\ k \in \mathbf{N}$. На каждом из этих промежутков случайный гамильтонов поток описывается уравнением Гамильтона $ddt\xi = IH'(\xi)$, соответствующим значению случайной функции Гамильтона на промежутке $[(k-1)T, kT)$. Приращения такого случайного процесса являются асимптотически независимыми при $T \to 0$ (т.е. для любых $t_1,\ t_2 \in R_+$: $t_1 < t_2$ и любого $\Delta t \in (0, t_2 - t_1)$ случайные величины $\xi(t_1 + \Delta t) - \xi(t_1)$ и $\xi(t_2 + \Delta t) - \xi(t_2)$ независимы при достаточно малых значениях $T$).

Аналогично, случайные квантовые системы с гильбертовым пространством чистых состояний $\mathbb{H}$ задают случайную эволюционную оператор-функцию $\xi(t) = \exp\left(-i\int_0^t \mathbf{H}(s)ds\right), t \geq 0$ (случайный квантовый поток), представляющую собой композицию случайных унитарных групп, обладающих постоянным случайным генератором на каждом из промежутков $\left[\frac{k-1}{n}T,\ \frac{k}{n}T\right),\ k \in \mathrm{N}$.

2. Итерации случайных полугрупп. В этом разделе определяются и исследуются композиции независимых случайных полугрупп линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Показано, что в силу теоремы Чернова асимптотическое поведение математических ожиданий композиций независимых случайных полугрупп определяет формулу Фейнмана, представляющую полугруппу, генерируемую математическим ожиданием случайного генератора.

Определение 1. Случайной полугруппой называется (см. [4, 9]) измеримое отображение $T$ вероятностного пространства $(\Omega, A, \mu)$ в топологическое векторное пространство $C_s(R_+, B(\mathbb{H}))$ сильно непрерывных отображений полуоси $R_+$ в банахово пространство $B(\mathbb{H})$ линейных ограниченных операторов в пространстве $\mathbb{H}$, значения которых принадлежат множеству $S_0(\mathbb{H})$ сильно непрерывных полугрупп таких операторов.

Для изучения случайной полугруппы $\mathbf{T}\colon \Omega \to \to S_0(\mathbb{H})$ наряду с ней рассматривается последовательность $\{\mathbf{T}_n \circ \ldots \circ \mathbf{T}_1\}$ итераций независимых случайных полугрупп $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots$, каждая из которых имеет такое же распределение значений, что и случайная полугруппа $\mathbf{T}$.

Определение 2. Последовательностью композиций независимых одинаково распределённых случайных полугрупп $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots$ называется последовательность однопараметрических операторнозначных случайных процессов $\left\{\xi_T^{(n)},\ T > 0\right\}$, определяемая следующим образом. Для каждого числа $T > 0$ и каждого $n \in \mathrm{N}$ положим

$$\xi_T^{(n)}(t, \omega_1, \ldots, \omega_k) = \mathbf{T}_k\left(t - \frac{k-1}{n}T, \omega_k\right) \circ$$
$$\circ \mathbf{T}_{k-1}\left(\frac{T}{n}, \omega_{k-1}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{T}_1\left(\frac{T}{n}, \omega_1\right), t \geq 0, \tag{1}$$

где $k = \left[\frac{t}{nT}\right] + 1$.

С последовательностью $\left\{\xi_T^{(n)}\right\}$ связана последовательность ступенчатых операторнозначных случайных процессов со значениями в множестве генераторов:

$$\left\{\mathbf{H}_n(t, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots), t \geq 0\right\}, \tag{2}$$

где при любых $k,\ n \in \mathrm{N}$ функция $\mathbf{H}_n$ принимает на промежутке $\left[\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right)$ постоянное случайное значение $i\mathbf{T}_k'(0)$. Поскольку случайные полугруппы $\mathbf{T}_k$ имеют одинаковые распределения, то это же верно и для их генераторов.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{D}$ — общая существенная область определения самосопряжённых генераторов* $\mathbf{H}(\omega), \omega \in \Omega$, *случайной унитарной полугруппы* $\mathbf{T}(t), t \geq 0$, *являющаяся существенной областью опре-*

*деления среднего генератора* $\bar{\mathbf{H}}$ *, определяемого равенством* $\bar{\mathbf{H}}u = \int_\Omega \mathbf{H}(\omega)ud\mu(\omega), u \in \mathcal{D}$. *Тогда*

1) *последовательность однопараметрических семейств случайных оператор-функций* (1) *является последовательностью оператор-функций с асимптотически независимыми приращениями;*

2) *при любом* $T > 0$ *последовательность математических ожиданий* $\mathrm{M}\left(\xi_T^{(n)}(t)\right), t \geq 0,$ *сходится равномерно на каждом отрезке к обобщённому среднему значению* $\exp\left(-i\bar{\mathbf{H}}t\right), t \geq 0,$ (см. [4]), *случайной полугруппы* $\mathbf{T}(t), t \geq 0.$

Замечание. Утверждение 2) теоремы означает, что последовательность математических ожиданий итераций (1) независимых случайных полугрупп является аппроксимацией полугруппы $\exp\left(\bar{\mathbf{T}}t\right),\ t \geq 0,$ посредством формулы Фейнмана

$$e^{\bar{\mathbf{T}}t} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{M}\left[\mathbf{T}\left(\frac{t}{n}\right)\right]\right)^n, t \geq 0.$$

3. Сходимость операторнозначных процессов. В разделе 2 исследовано предельное поведение математических ожиданий последовательности композиций независимых случайных полугрупп. В этом разделе изучаются предельные свойства распределений таких композиций. Будет показано, что последовательность композиций независимых случайных полугрупп представляет собой последовательность операторнозначных случайных процессов, сходящуюся по вероятности к детерминированной полугруппе, генерируемой математическим ожиданием случайного генератора.

Для изучения сходимости последовательности случайных величин со значениями в пространстве $C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$ введём некоторые топологии на этом пространстве. С этой целью определим следующие семейства функционалов.

1. Семейство функционалов $\varphi_{T,u}, T>0, u \in \mathbb{H}$, и $\psi_T, T>0,$ определяемых равенствами $\varphi_{T,u}(\xi) = \|\xi(T)u\|_{\mathbb{H}}$ и $\psi_T(\xi) = \|\xi(T)\|_{B(\mathbb{H})}$ соответственно.

2. Семейство функционалов $\left\{\Phi_{T,u},\ T \geq 0, u \in \mathbb{H}: \Phi_{T,u}(\xi) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\xi(t)u\|_{\mathbb{H}}\right\}$, а также семейство функционалов $\left\{\Psi_T, T \geq 0: \ \Psi_T(\xi) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\xi(t)\|_{B(\mathbb{H})}\right\}$.

Перечисленные выше системы функционалов определяют хаусдорфовы топологии на линейном пространстве $C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$. Если пространство $\mathbb{H}$ является сепарабельным, то эти топологии обладают счётной базой.

3. Символом $GY_s(\mathbb{H}) = C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$ обозначим подмножество топологического векторного пространства $Y_s(\mathbb{H}) = C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$, элементами которого являются сильно непрерывные функции $\xi : R_+ \to B(\mathbb{H})$, значениями которых являются обратимые операторы, и оператор-функция $\left(\xi(t)\right)^{-1}$, $t \in R_+$, принадлежит пространству $Y_s(X) = C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$. На множестве $GY_s(\mathbb{H})$ в линейном пространстве $C_s\left(R_+, B(\mathbb{H})\right)$ определим семейство функционалов $h_{u_1,u_2}^{t_1,t_2}, u_1, u_2 \in \mathbb{H}, t_1, t_2$, задаваемых равенствами $h_{u_1,u_2}^{t_1,t_2} = \left|\left(u_2, \left(\xi_1(t_1)\right)^{-1} \circ \xi(t_2)u_1\right)\right|$. А также семейство функционалов $H_{u_1,u_2}^{t_1,t_2}, u_1, u_2 \in X, t_1, t_2$, определяемых равенствами

$$H_{u_1,u_2}^{t_1,t_2} = \sup_{t\in\left[t_1,t_2\right]}\left(u_2, \left(\xi_1(t_1)\right)^{-1} \circ \xi(t)u_1\right).$$

Введённые системы функционалов определяют хаусдорфовы топологии $\tau_h$ и $\tau_H$ соответственно на линейном пространстве $GY_s(\mathbb{H})$. Если пространство $\mathbb{H}$ является сепарабельным, то эти топологии обладают счётной базой.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность случайных процессов $\{\xi_n\}$ со значениями в топологическом пространстве $(Y, \tau)$, топология в котором порождена семейством функционалов $\mathcal{F}$, сходится к случайному процессу $\xi$ по вероятности, если для любого функционала $\Phi \in \mathcal{F}$ выполняется условие $P\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\Phi\left(\xi_n - \xi\right) > \varepsilon\right\} = 0$ при любом значении $\varepsilon > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда последовательность случайных процессов* (1) *сходится по вероятности в топологии* $\tau_H$ *к детерминированной полугруппе* $\exp\left(-i\bar{\mathbf{H}}t\right),\ t \geq 0.$

4. Случайные гамильтоновы потоки. В этом разделе исследованы случайные гамильтоновы потоки при помощи их линейного представления группами унитарных операторов (см. [8]).

Результаты теорем 1 и 2 применены к описанию динамики случайной гамильтоновой системы.

Для изучения случайных гамильтоновых потоков в конечномерном фазовом пространстве $E$ наряду со случайным процессом $\xi_t, t \in R_+$, со значениями в евклидовом пространстве $E$ исследуем случайные процессы $U_t$, $t \in R_+$, со значениями в пространстве $B(L_2(E))$, определяемые равенством $\mathbf{U}_t = \mathbf{S}_{\xi_t}$, $t \in R_+$, где $\mathbf{S}_\xi$ – оператор сдвига аргумента на вектор $\xi$, т.е. $\mathbf{S}_{\xi_t} u(x) = u(x + \xi_t)$. Так как значениями процесса $\xi_\omega(t), t \geq 0, \omega \in \Omega$, являются преобразования, сохраняющие меру Лебега на фазовом пространстве $E$, то $\{\mathbf{U}_t,\ t \in R_+\}$ является семейством случайных унитарных преобразований гильбертова пространства $H = L_2(E)$. Тогда из теоремы 2 следует

Следствие 1. *Пусть $h\colon \Omega \to C^1(E,R)$ – случайная функция Гамильтона, $\{h_n\}$ – последовательность независимых случайных функций Гамильтона, распределения которых совпадают с распределением H. Тогда если $\bar{h} = \int_\Omega h(\omega)dP(\omega)$, то последовательность $\{\xi_{h_n}\}$ случайных гамильтоновых потоков сходится по вероятности к гамильтонову потоку $\xi_{\bar{h}}$, порождённому усреднённой функцией Гамильтона, в том смысле, что для любой функции $u \in L_2(E)$ и любого числа $L > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\sup_{t\in[0,L]} \left\| \mathrm{S}_{\xi_{h_n}(t)} u - \mathrm{S}_{\xi_{\bar{h}}(t)} u \right\|_H > \epsilon \right\}\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

5. О диффузионных процессах. В этом разделе исследованы случайные оператор-функции, приращения которых имеют в некотором смысле вид $\mathbf{A}(\Delta t)^{1/2}$, где $\mathbf{A}$ – случайный линейный оператор. В случае, когда оператор-функция $\mathbf{A}$ задаётся операторами случайного сдвига аргумента, получено представление решения прямого уравнения Колмогорова формулами Фейнмана для математического ожидания случайной оператор-функции.

Например, если $E = R^d$ – конечномерное евклидово пространство, $T > 0$ и для каждого $n \in \mathbf{N}$ определён случайный процесс $\xi_T^{(n)}$ со значениями в пространстве $E$, значения которого при произвольном $t > 0$ определяются так:

$$\xi_T^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \eta_j\left(\frac{T}{n}\right) + \eta_k\left(t - (k-1)\frac{T}{n}\right),$$

где $k \in \mathbf{N}$: $(k-1)T < nt \leq kT$, $\eta_j(t) = A_j t^{1/2}$, $t \geq 0$, $j \in \mathbf{N}$, где $A_j$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин со значениями в $E$.

Тогда если математическое ожидание случайной величины $A$ равно нулю, а её ковариационный оператор есть $D \in B(E)$, то последовательность случайных процессов $\{\xi_n\}$ сходится к винеровскому процессу с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $D$ (см. [5]).

Последовательность $\{\mathrm{M}(S_{\xi_n})\}$ математических ожиданий случайных оператор-функций – семейств $S_{\xi_n(t)}, t \geq 0$, случайных операторов сдвига вдоль случайной траектории $\xi_n(t)$, $t \geq 0$, – сходится в силу теоремы Чернова к сжимающей полугруппе $e^{\Delta_D t}$, $t \geq 0$, равномерно на каждом отрезке в сильной операторной топологии.

Пример справедливости подобного утверждения в случае бесконечномерного пространства $E$ приведён в работе [5]. Пусть $E$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, снабжённое трансляционно инвариантной мерой $\lambda$, и пусть $\mathcal{H} = L_2(E, \lambda, \mathbf{C})$ – пространство квадратично интегрируемых по мере $\lambda$ комплекснозначных функций (см. [5]). Пусть $T > 0$ и для каждого $n \in \mathbf{N}$ определена операторнозначная случайная величина $\xi_T^{(n)}$ со значениями в пространстве $C(R_+, B(\mathcal{H}))$, значения которой при произвольном $t > 0$ определяются так:

$$\xi_T^{(n)}(t) = \eta_k\left(t - (k-1)\frac{T}{n}\right) \circ \eta_{k-1}\left(\frac{T}{n}\right) \circ \ldots \circ \eta_1\left(\frac{T}{n}\right). \tag{3}$$

В соотношении (3) $k \in \mathbf{N}$: $(k-1)T < nt \leq kT$, $\eta_j(t) = \mathbf{S}_{h_j t^{1/2}}$, $t \geq 0$, $j \in \mathbf{N}$, где $\mathbf{S}_h$ – оператор сдвига аргумента на вектор $h \in E$, $h_j$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин со значениями в $E$, т.е. $\mathbf{S}_{h_j t^{1/2}} u(x) = u(x + h_j t^{1/2})$.

Тогда если случайная величина $h$ имеет гауссовское распределение с ядерным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, то последовательность (3) сходится по вероятности в топологии $\tau_H$ к диффузионному процессу, описывающему однопараметрическую полугруппу линейных самосопряжённых сжатий пространства $\mathcal{H}$.

Пример сходимости по вероятности последовательности процессов сдвига вдоль случайных характеристик нелинейной системы ОДУ в конечномерном пространстве к детерминированному процессу сдвига вдоль усреднённого векторного поля в топологии линеаризованного представления приведён в [2].

Пусть $E = R^d$ – конечномерное евклидово пространство, $T > 0$ и для каждого $n \in \mathbf{N}$ определена операторнозначная случайная величина $\xi_T^{(n)}$ со значениями в пространстве $C\left(R_+, B\left(L_2(E), L_2(E)\right)\right)$, значения которой при произвольном $t > 0$ определяются так:

$$\xi_T^{(n)}(t) = \eta_k\left(t - (k-1)\frac{T}{n}\right) \circ \eta_{k-1}\left(\frac{T}{n}\right) \circ \ldots \circ \eta_1\left(\frac{T}{n}\right). \tag{4}$$

В соотношении (4) $k \in \mathbf{N}$: $(k-1)T < nt \le kT$, $\eta_j(t) = \mathbf{S}_{\mathbf{X}_t} \circ \mathbf{S}_{h_j t^{1/2}}$, $t \ge 0$, $j \in N$, где $\mathbf{S}_h$ — оператор сдвига аргумента на вектор $h \in E$, $h_j$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин со значениями в $E$, т.е. $S_{h_j t^{1/2}} u(x) = u(x + h_j t^{1/2})$. Здесь $\mathbf{S}_{\mathbf{X}_t}$ — оператор сдвига вдоль траекторий решения нормальной автономной системы ОДУ $\dot{x}(t) = \mathbf{a}(x(t))$: $\mathbf{S}_{\mathbf{X}_t} u(x) = u\left(X_{-t}(x)\right)$, где $X_t(x), x \in E, t \in R$, – решение задачи Коши для системы ОДУ с начальным условием $x \in R$.

Теорема 3. *Пусть векторное поле* $\mathbf{a}$ *непрерывно дифференцируемо на* $E$ *и удовлетворяет условию* $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. *Тогда если случайная величина* $h$ *имеет нулевое среднее, матрицу ковариаций* $\mathbf{D}$ *и конечный третий момент, то последовательность* (4) *сходится по вероятности в топологии* $\tau_H$ *к диффузионному процессу, описываемому следующим прямым уравнением Колмогорова* (*уравнением Фоккера–Планка*):

$$u_t'(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_D u(t,x) + \left(\nabla u(t,x), a(x)\right). \tag{5}$$

Действительно, математические ожидания последовательности случайных процессов (4) являются оператор-функцией, эквивалентной по Чернову полугруппе, разрешающей задачи Коши для дифференциального уравнения (5) (см. [8]). В силу предположения о бездивергентности поля $\mathbf{a}$ семейство $\mathbf{X}_t, t \in R$, преобразований пространства $E$ образует группу сохраняющих меру Лебега диффеоморфизмов пространства $E$, а семейство $\mathbf{S}_{\mathbf{X}_t}, t \in R$, образует группу унитарных преобразований гильбертова пространства $H = L_2(E)$. Поэтому для дисперсии композиции случайных преобразований (4) справедливы оценки работы [9]. Следовательно, дисперсия стремится к нулю в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке, откуда следует сходимость по вероятности в топологии $\tau_H$ последовательности процессов (4) к диффузионному процессу.

**Источники финансирования.** Работа связана с лабораторией бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Работа третьего автора пользовалась поддержкой гранта визит-профессора МФТИ. Кроме того, она поддержана МГУ в рамках гранта “Фундаментальные проблемы математики и механики”.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.; Ижевск: РХД, 2011.
2. *Козлов В.В., Смолянов О.Г.* Гамильтонов подход к вторичному квантованию // ДАН. 2018. Т. 483. № 2. С. 138—142.
3. *Козлов В.В., Смолянов О.Г.* Инвариантные и квазиинвариантные меры на бесконечномерных пространствах // ДАН. 2015. Т. 465. № 5. С. 527—531.
4. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2016. Т. 80. № 6. С. 141—172.
5. *Sakbaev V.Zh.* Averaging of Random Walks and Shift—Invariant Measures on a Hilbert Space // Theoret. and Math. Phys. 2017. V. 191. № 3. P. 886—909.
6. *Козлов В.В., Смолянов О.Г.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 607—611.
7. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М., 2015.
8. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 3. С. 271—275.
9. *Сакбаев В.Ж.,* О законе больших чисел для композиций независимых случайных полугрупп // Изв. вузов. Сер. мат. 2016. № 10. С. 72—76.

# RANDOMIZES HAMILTONIAN MECHANICS

**Yu. N. Orlov[1], V. Zh. Sakbaev[2,3], O. G. Smolyanov[2,3]**

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*
[3] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V. V. Kozlov January 25, 2019

Received March 19, 2019

Randomized Hamiltonian mechanics is the Hamiltonian mechanics which is determined by a time-dependent random Hamiltonian function. Corresponding Hamiltonian system is called random Hamiltonian system. The Feynman formulas for the random Hamiltonian systems are obtained. This Feynman formulas describe the suluions of Hamilton equation whose Hamiltonian is the mean value of random Hamiltonian function. The analogs of the above results is obtained for a random quantum system (which is a random infinite dimensional Hamiltonian system). This random quantum Hamiltonians are the part of Hamiltonians of open quantum system.

*Keywords:* Hamiltonian system, Feynman formula, randomization, random Hamiltonian, random semigroup of mappings.