ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 486*, *№ 6*, *с. 673–674*

МЕХАНИКА

УДК 532.517.4

ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В СРЕДЕ С ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ И ВИХРЬ ХИЛЛА

Академик РАН Г. Ф. Крымский

Поступило 10.12.2018 г.

Предложен новый подход к вычислению диссипации механической энергии в среде с турбулентной вязкостью, основанный на определении модуля сдвига скорости. В качестве примера рассмотрена динамика вихря Хилла, движущегося в такой среде. Радиус вихря растёт линейно с пройденным расстоянием и составляет около 13% от него.

Ключевые слова: турбулентная вязкость, диссипация, сдвиг скорости, вихрь Хилла.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524866673-674

Диссипация энергии в турбулентном течении описывается по Прандлю с помощью характерного масштаба перемешивания, который определённым образом связан с масштабом течения [1]. В качестве последнего часто выступают размеры тела, обтекаемого потоком. При этом выбор размера допускает определённый произвол. Желательно иметь оценку диссипации, основанную на локальных параметрах течения. Здесь предложена такая оценка.

В среде с обычной вязкостью η потери энергии в единице объёма составляют [1]:

$$\frac{dW}{dt} = -2\eta T^2,$$

где $W = \rho v^2$ – плотность механической энергии, ρ – плотность жидкости, v – её скорость, T^2 – квадрат тензора сдвига скорости. Тензор сдвига [1]

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

имеет в декартовой системе явное выражение для квадрата

$$T^2 = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2.$$

Модуль тензора T имеет размерность обратного времени и является единственной локальной характеристикой течения с такой размерностью. В случае течения с турбулентной вязкостью естественно оценить потери энергии как

$$\frac{dW}{dt} = -WT.$$

Следует сделать два замечания по поводу этой формулы. Во-первых, она применима, разумеется, лишь в тех случаях, когда турбулентность обусловлена сдвигом скорости, а сам сдвиг известен. Сдвиг при этом может иметь различные причины. Например, это может быть затопленная струя, или пристеночное течение, или наличие вихря. Во-вторых, формула основана на соображениях размерности и, следовательно, должна содержать неопределённый численный множитель. Практика показывает, что численный множитель в таких оценочных формулах обычно имеет величину порядка единицы. У нас он положен равным точно единице. Уточнение его величины возможно опытным путём. Наиболее простой опыт может состоять в наблюдении динамики дымовых колец. Кольца возникают при движении вихря Хилла, и их внешний радиус в $\sqrt{2}$ раза меньше радиуса вихря. Поэтому здесь приводится соответствующий подсчёт.

Применим нашу формулу для рассмотрения динамики сферического вихря Хилла, движущегося в среде с турбулентной вязкостью. Поле скоростей в системе отсчёта вихря внутри сферы R [2]:

$$v_r = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\cos\theta,$$

$$v_\theta = v_0\left(\frac{2r^2}{R^2} - 1\right)\sin\theta.$$

На поверхности вихря это поле соответствует идеальному обтеканию сферы потоком со скоростью $U = \frac{2}{3}v_0$.

При обтекании вихря внешним потоком часть обтекающего вещества затормаживается. Это веще-

Институт космофизических исследований и аэрономии им. Ю.Г. Шафера Сибирского отделения Российской Академии наук, Якутск

E-mail: Krymsky@ikfia.sbras.ru

ство частично присоединяется к вихрю, а частично теряется в следе. Потеря вещества вихря в следе сопровождается потерей импульса и энергии. Механическая энергия также теряется вследствие турбулентной диссипации. Чтобы составить уравнения динамики вихря, следует найти эти потери.

Для вихря Хилла квадрат скорости

$$v^2 = v_0^2\left(2\frac{r^2}{R^2}-1\right)^2 + v_0^2\frac{r^2}{R^2}\left(2-3\frac{r^2}{R^2}\right)\cos^2\theta,$$

а квадрат тензора сдвига

$$T^2 = \frac{9}{2}\frac{v_0^2 r^2}{R^4}\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\theta\right).$$

Подставляя вычисленные величины в формулу для диссипации и производя интегрирование по всему объёму вихря, находим вязкие потери механической энергии

$$\frac{dE}{dt} = -0{,}967\rho v_0^3 R^2 = -0{,}779\frac{MU^3}{R}.$$

В последней части равенства потери выражены через массу вихря и скорость обтекания. Полная механическая энергия вихря, состоящая из энергии поступательного движения и энергии внутреннего движения, равна

$$E = 1{,}529\rho v_0^2 R^3 = 0{,}818 MU^2.$$

Предполагая, что прирастание массы вихря и потери вещества равны, получим уравнения импульса и энергии

$$\frac{d}{dt}(MU) = -\dot{M}U,$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha MU^2) = -\beta\frac{MU^3}{R} - \dot{M}\frac{U^2}{2}.$$

Здесь $\alpha = 0{,}818$; $\beta = 0{,}779$.

Принимая во внимание, что $\frac{d}{dt} = U\frac{d}{ds}$, где s – пройденный путь, преобразуем уравнения

$$2\frac{M'}{M} + \frac{U'}{U} = 0,$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{M'}{M} + 2\alpha\frac{U'}{U} = -\frac{\beta}{R}.$$

Избавляясь от скорости в последнем уравнении и подставляя вместо массы её выражение через радиус, получаем уравнение

$$3\left(-3\alpha+\frac{1}{2}\right)\frac{R'}{R} = -\frac{\beta}{R},$$

решение которого

$$R = \frac{\beta}{3\left(3\alpha-\frac{1}{2}\right)}s = 0{,}133s.$$

Скорость вихря

$$U = U_0\left(\frac{s}{s_0}\right)^{-6}$$

быстро затухает с пройденным расстоянием. Зависимости $R(s)$ и $U(s)$ определяют динамику вихря.

Благодарности. Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
2. *Милн-Томсон Л.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 660 с.

DISSIPATION OF ENERGY IN THE ENVIRONMENT WITH TURBULENT VISCOSITY AND A HILL VORTEX

Academician of the RAS G.F. Krymsky

The Yakut Scientific Centre of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Yakutsk, Russian Federation

Received December 10, 2018

A new approach to calculation of the dissipation of mechanical energy in the environment with turbulent viscosity based on determination of the shear modulus of velocity is proposed. As an example the dynamics of Hill vortex moved in such environment is considered. The vortex radius extends linearly with the distance covered and makes up about 13% from it.

Keywords: turbulent viscosity, dissipation, shear modulus of velocity, Hill vortex.