ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 1, с. 7–10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА ГРОССА—СОБОЛЕВА

Ш. М. Насибов

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 13.01.2019 г.

Поступило 28.01.2019 г.

Доказывается одно точное интегральное неравенство, с помощью которого выводится одно интерполяционное неравенство Соболева. Предлагается одно обобщение логарифмического неравенства Соболева на основе интерполяционного неравенства Соболева.

Ключевые слова: преобразование Фурье, неравенство Хаусдорфа—Юнга, точное интегральное неравенство, интерполяционное неравенство Соболева, логарифмическое неравенство Гросса—Соболева.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-565248717-10

1. ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА

В разделе доказывается одно точное интегральное неравенство, из которого в силу неравенства Хаусдорфа—Юнга выводится интерполяционное неравенство Соболева.

1.1. Интегральное неравенство

Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения:

$$\|U\|_p = \left\{ \int\limits_{R^n} |U(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

есть норма в $L_p(R^n)$, индекс p в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p = 2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Пусть k — любое положительное число. Пусть ρ — заданное положительное число такое, что при $n - k \leq 0$ число ρ любое, а при $n - k > 0$ ρ удовлетворяет неравенству $\rho < \dfrac{2k}{n-k}$. Положим $\alpha = \dfrac{n\rho}{k(\rho+2)}$; для заданного α определим $\chi = \sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}$.

Для любого $\theta > 0$ определим $\Gamma(\theta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{\theta-1} dt$ — гамма-функция Эйлера; $B(\beta, \gamma) = \int\limits_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-1} dt$ для всех $\beta > 0$, $\gamma > 0$ — бета-функция Эйлера; $\sigma_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$;

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{k} B\left(\frac{n}{k}, \frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha k}{2n}} = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\left(\frac{\sigma_n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\Gamma\left(\frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{k\alpha}\right)}\right]^{\frac{\alpha k}{2n}}. \quad (1)$$

Лемма 1. *Пусть k, ρ, α — определённые выше числа, $V(x) \in L_2(R^n)$, $r^{k/2}V(x) \in L_2(R^n)$, $r = |x|$. Тогда справедливо следующее интегральное неравенство*:

$$\|V\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \leq K_g(\alpha)\|r^{k/2}V\|^{\alpha}\|V\|^{1-\alpha}, \quad (2)$$

где $K_g(\alpha)$ — константа, определённая формулой (1). *Константа является точной*: *неравенство* (2) *переходит в равенство при*

$$V(x) = V_0(r) = \frac{\omega_1}{(\omega_2 + \omega_2 r^k)^{1+1/\rho}},$$

где ω_1, ω_2, ω_3 — произвольные положительные числа.

1.2. Неравенство Хаусдорфа—Юнга

Лемма 2. *Пусть*

$$\hat{U}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{R^n} e^{-i(x,\xi)} U(x) dx, \quad \xi \in R^n,$$

есть преобразование Фурье функции $U(x), \hat{U} \in L_p(R^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда справедливо следующее неравенство Хаусдорфа—Юнга:

$$\|U\|_{p'} \leq K_B(p)\|\hat{U}\|_p, \quad K_B(p) = \left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/p}\left(\frac{p'}{2\pi}\right)^{-1/p'}\right]^{n/2},$$

Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
E-mail: *nasibov_sharif@mail.ru*

$1 \le p \le 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *с наилучшей константой Бекнера—Бабенко* [1—4].

1.3. Результаты

Теорема 1. *Пусть k, ρ, α — определённые выше числа, $U(x) \in L_2(R^n)$, $r^{k/2}\hat{U}(\xi) \in L_2(R^n)$, $r = |\xi|$. Тогда справедливо следующее мультипликативное неравенство Соболева*:

$$\|U\|_{\rho+2} \le \bar{K}_0 \|r^{k/2}\hat{U}(\xi)\|^{\alpha}\|U\|^{1-\alpha}. \tag{3}$$

Здесь $\bar{K}_0 = K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)$, $K_g(\alpha)$ *определено формулой* (1).

Приведём схему доказательства (3).

В силу неравенства (2) заключаем, что

$$\|\hat{U}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \le K_g(\alpha)\||\xi|^{k/2}\hat{U}\|^{\alpha}\|\hat{U}\|^{1-\alpha}. \tag{4}$$

Но в силу теоремы Планшереля—Парсеваля имеем

$$\|\hat{U}\| = \|U\|. \tag{5}$$

Следовательно, при условиях теоремы 1 заключаем, что $\hat{U} \in L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(R^n)$. Тогда по неравенству Хаусдорфа—Юнга имеем

$$\|U\|_{\rho+2} \le K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)\|\hat{U}\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}. \tag{6}$$

Теперь из (4)–(6) следует (3).

Пусть в теореме 1 $k = 2$. Тогда в силу соотношения $\||\xi|\hat{U}\| = \|\nabla U\|$ из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 1. *Пусть* $\rho \in (0, \infty)$ *при* $n = 1, 2$, *а при* $n \ge 3$ $\rho \in \left(0, \frac{4}{n-2}\right)$, $\alpha = \frac{\rho n}{2(\rho+2)}$. *Далее пусть* $U(x) \in H^1(R^n)$.

Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Гальярдо—Ниренберга—Соболева:

$$\|U\|_{\rho+2} \le \bar{K}_0\|\nabla U\|^{\alpha}\|U\|^{1-\alpha}. \tag{7}$$

Здесь $\bar{K}_0 = K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)$, *где*

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\chi}\left[0{,}5\sigma_n B\left(\frac{n}{2}, \frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha}{n}} = \frac{1}{\chi}\pi^{\alpha/2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2\alpha}\right)}\right]^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Пусть в теореме 1 $k = 4$. Тогда в силу соотношения $\||\xi|^2\hat{U}\| = \|\Delta U\|$ [5] из теоремы 1 вытекает следующее

Следствие 2. *Пусть* $\rho \in (0, \infty)$ *при* $n \le 4$, *а при* $n > 4$ $\rho \in \left(0, \frac{8}{n-4}\right)$, $\alpha = \frac{n\rho}{4(\rho+2)}$. *Пусть* $U(x) \in L_2(R^n)$, $\Delta U \in L_2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее интерполяционное неравенство Соболева*:

$$\|U\|_{\rho+2} \le \bar{K}_0\|\Delta U\|^{\alpha}\|U\|^{1-\alpha}. \tag{8}$$

Здесь

$$\bar{K}_0 = K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right),$$

где

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\chi}\left[\frac{\sigma_n}{4}B\left(\frac{n}{4}, \frac{n(1-\alpha)}{4\alpha}\right)\right]^{2\alpha/n}.$$

2. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО ГРОССА—СОБОЛЕВА

Теорема 2. *Пусть k — произвольное положительное число, $U(x) \in L_2(R^n)$ и $|\xi|^{k/2}\hat{U}(\xi) \in L_2(R^n)$.*

Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса—Соболева:

$$\int_{R^n}\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right)dx \le \le \frac{n}{k}\ln\left[\frac{k\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n}\||\xi|^{k/2}\hat{U}\|^2}{n\pi^k e^{k-1}\|U\|^2}\right]. \tag{9}$$

Как следствие, из теоремы 2 вытекают следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть $U(x) \in H^1(R^n)$. Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса—Соболева*:

$$\int_{R^n}\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right)dx \le \frac{n}{2}\ln\left(\frac{2\|\nabla U\|^2}{\pi e n\|U\|^2}\right). \tag{10}$$

Неравенство (10) *является точным*: *оно переходит в равенство при*

$$U(x) = a\exp(-b|x|^2),$$

где a, b — произвольные положительные постоянные.

Положим в (9) $k = 4$.

Предложение 2. *Пусть* $U(x) \in H^2(R^n)$. *Тогда справедливо следующее логарифмическое неравенство Гросса—Соболева*:

$$\int_{R^n} \frac{|U|^2}{\|U\|^2} \ln\left(\frac{|U|^2}{\|U\|^2}\right) dx \le$$
$$\le \frac{n}{4} \ln\left[\frac{4\left(\frac{\sigma_n}{4}\Gamma\left(\frac{n}{4}\right)\right)^{4/n} \|\Delta U\|^2}{n\pi^4 e^3 \|U\|^2}\right]. \quad (11)$$

Неравенство (10) впервые доказано Гроссом [6]. Бекнер [7] отмечает, что после того, как Гросс нашёл логарифмическое неравенство Соболева, оно стало народным фольклором. Другие неравенства типа Гросса—Соболева доказаны в [4, 8—10] и др.

Приведём схему доказательства неравенства (9). Перепишем неравенство (3) в следующем виде:

$$\|U\|_{\frac{2n}{n-\alpha k}} \le K_B(\alpha) K_g(\alpha) \||\xi|^{k/2}\hat{U}\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha}, \quad (12)$$

где

$$K_B(\alpha) = \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{\alpha k}{2}} \frac{(n-\alpha k)^{\frac{n-\alpha k}{4}}}{(n+\alpha k)^{\frac{n+\alpha k}{4}}},$$

$$K_g(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}}} \left[\frac{\sigma_n}{k} B\left(\frac{n}{k}, \frac{n(1-\alpha)}{k\alpha}\right)\right]^{\frac{\alpha k}{2n}}.$$

Легко показать, что $\lim\limits_{\alpha \to 0+0} K_g(\alpha) = 1$ и $K_B(0) = 1$. Тем самым неравенство (12) остаётся справедливым и при $\alpha = 0$.

Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = \|U\|_{\frac{2n}{n-\alpha k}} - K_0 \||\xi|^{k/2}\hat{U}\|^{\alpha} \|U\|^{1-\alpha},$$

где $K_0 = K_B(\alpha) K_g(\alpha)$. Так как $f(\alpha) \le 0$ для $\alpha \in [0, 1)$, то $f'(0) \le 0$. При вычислении $f'(0)$ следует иметь в виду, что $K'_B(0) = -\ln(\pi e)$ и

$$K'_g(0) = \frac{1}{2} \ln\left[\frac{ek\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n}}{n}\right].$$

Неравенство (2) также применяется при доказательстве обобщённого неравенства энтропии

$$-\int_{R^n} \frac{|U(x)|^2}{\|U\|^2} \ln\left(\frac{|U(x)|^2}{\|U\|^2}\right) dx \le$$
$$\le \frac{n}{k} \ln\left[\frac{ek\left(\frac{\sigma_n}{k}\Gamma\left(\frac{n}{k}\right)\right)^{k/n} \|r^{k/n} U\|^2}{n\|U\|^2}\right]. \quad (13)$$

При условии, что $U(x) \in L_2(R^n)$, $r^{k/2}U(x) \in L_2(R^n)$ для любого $k > 0$, неравенство (13) является точным: оно переходит в равенство при

$$U(x) = U_0(r) = a\exp(-b|x|^k),$$

где a, b — произвольные положительные постоянные [11].

Замечание 1. Интерполяционное неравенство (7) доказано также в [12] с другой константой в нём. Это неравенство применяется при исследовании вопроса глобальной разрешимости задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения Шрёдингера [13], а также в спектральной теории для оператора Шрёдингера [12].

Замечание 2. Неравенство (13) при $k = 2$ анонсировано в [13], доказано в [14].

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность академику РАН В.П. Маслову за полезные советы и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 531—542.
2. *Beckner W.* // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 159—182.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.
4. *Lieb E.H., Loss M.* Analysis. Graduate Studies in Mathematics. N.Y.: AMS, 2001. V. 14.
5. *Насибов Ш.М.* // Изв. РАН. Сер. мат. 2009. Т. 73. № 3. С. 127—156.
6. *Cross L.* // Amer. J. Math. 1975. V. 97. P. 1061—1683.
7. *Beckner W., Pearson M.* // Bull. London Math. Soc. 1998. V. 30. P. 80—84.
8. *Weissler F.B.* // Tranc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 237. P. 255—259.
9. *Beckner W.* // Forum Math. 1999. V. 11. P. 105—137.
10. *Carlen E.A.* // J. Func. Anal. 1991. V. 101. P. 194—211.
11. *Насибов Ш.М.* // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 2. С. 278—282.
12. *Veling E.J.* // J. Ineqnal. Pure Appl. Math. 2002. V. 3. № 4.
13. *Насибов Ш.М.* // ДАН. 1989. Т. 307. № 3. С. 538—542.
14. *Насибов Ш.М.* // Мат. заметки. 2008. Т. 84. № 2. С. 207—128.

ON ONE GENERALIZATION OF GROSS—SOBOLEV LOGARITHNIC INEQUALITY

Sh. M. Nasibov

Institute of Applied Mathematics, *Baku State University*, *Baku*, *Azerbaijan*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov January 13, 2019

Received January 28, 2019

We prove an exact itegral inequality by means of which one interpolational Sobolev inequality is derived. One generalization of logarithmics Sobolev inequality based on interpolational Sobolev inequality is offered.

Keywords: Fourier transform, Hausdorff–Young inequality, exact integral inequality,iterpolational Sobolev inequality, logarithmic Gross–Sobolev inequality.