ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 1, с. 15–19

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 531.01+629.7.05

НЕГЛАДКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ЗАДАЧЕ КАЛИБРОВКИ БЛОКА НЬЮТОНОМЕТРОВ

А. И. Матасов

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 11.03.2019 г.

Поступило 18.03.2019 г.

В рамках гарантирующего подхода к оцениванию предлагается новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров. Эта задача сводится к анализу специальных негладких вариационных задач. На основании новой формализации обосновывается метод скаляризации, широко используемый при калибровке блока ньютонометров. В частности, определена граница его применимости.

Ключевые слова: гарантирующий подход к оцениванию, блок ньютонометров, калибровка.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652487115-19

Гарантирующий подход к оцениванию в так называемой априорной постановке впервые был сформулирован в классических работах [1–3] (см. также [4]). В дальнейшем он был развит в [5, 6] в связи с решением задач космической баллистики (см. также [7, 8]). Оказалось, что гарантирующий подход при небольшой модификации является очень удобным инструментом для формализации задачи калибровки блока ньютонометров [9, 10], который представляет собой один из главных сенсоров инерциальной навигационной системы. При калибровке блока ньютонометров в случае грубой информации об угловых положениях стенда традиционно применяется метод скаляризации [11–13].

В данной работе в рамках гарантирующего подхода предлагается новая формализация задачи калибровки блока ньютонометров, основанная на анализе специальных вариационных задач. Указывается связь предлагаемой формализации с методом скаляризации и определяется граница применимости этого метода.

1. Опишем формализацию задачи калибровки. В идеале три ньютонометра должны быть установлены строго по осям так называемого приборного трёхгранника, положение которого фиксировано в корпусе бесплатформенной инерциальной навигационной системы. Традиционная модель показаний реального (неидеального) блока ньютонометров имеет вид [10]

$$f' = (I_3 + \Gamma) f_z + \Delta f^0 + \rho', \tag{1}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: *alexander.matasov@gmail.com*

где $f' \in \mathbb{R}^3$ — показания блока ньютонометров; $I_3 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ — единичная матрица; $\Gamma \in \mathbb{R}^{3\times3}$ — матрица погрешностей блока (диагональные элементы которой характеризуют ошибки масштабных коэффициентов, а внедиагональные — несоосности ньютонометров); $f_z \in \mathbb{R}^3$ — вектор удельной силы, действующей на чувствительную массу блока в проекциях на приборный трёхгранник (при рассматриваемых здесь статических испытаниях она равна ускорению силы тяжести в точке проведения экспериментов с обратным знаком); $\Delta f^0 \in \mathbb{R}^3$ — систематические смещения показаний блока, $\rho' \in \mathbb{R}^3$ — флуктуационная составляющая ошибок измерений. Определение величин Γ и Δf^0 составляет цель калибровки. Для этого блок ньютонометров устанавливают в различные угловые положения относительно силы тяжести, составляя систему уравнений для нахождения указанных ошибок. Главная проблема состоит в определении набора этих угловых положений. Поскольку проведение калибровочных экспериментов — технологически не простая процедура, то количество таких положений желательно сократить.

Для удобства нормализуем соотношение (1), разделив его на модуль ускорения силы тяжести g, который для простоты будет считаться точно известным. Тогда (1) представится в виде

$$\frac{f'}{g} = (I_3 + \Gamma) n_z + \varepsilon + \rho, \quad \|n_z\| = 1, \tag{2}$$

$$n_z = \frac{f_z}{g}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta f^0}{g}, \quad \rho = \frac{\rho'}{g}.$$

Приближённое знание о единичном векторе n_z ориентации приборного трёхгранника относительно ускорения силы тяжести определяется по измерениям углов поворота стенда. Обозначим через n наше знание об n_z (n точно известно). Опишем неточность в знании ориентации вектором малого поворота $\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с неизвестными, но ограниченными известной величиной μ компонентами. Тогда с точностью до малых второго порядка

$$n_z = (I_3 + \hat{\alpha})n, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$|\alpha| \le \mu, \quad i = 1, 2, 3.$$

Будем считать, что компоненты ошибок измерений показаний ньютонометров $\rho = \mathrm{col}(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ также ограничены известной величиной σ. Вводя новую точно известную величину $z(n) = g^{-1}f'(n) - n \in \mathbb{R}^3$, соотношение (2) можно переписать в виде

$$z(n) = (\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + \varepsilon + \rho(n), \quad n \in S, \tag{3}$$

где S — единичная сфера, при условиях

$$|\alpha_i| \le \mu, \quad |\rho_i(n)| \le \sigma, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Тогда задача калибровки принимает вид задачи оценивания, в которой по континууму всех измерений $z(n)$ на единичной сфере, определяемых уравнением (3), требуется найти элементы Γ и ε на фоне помех $\alpha(n)$ и $\rho(n)$, ограниченных условиями (4).

2. Применим гарантирующий подход к задаче калибровки. Рассмотрим векторные измерения (3), (4), в которых помехи $\alpha(n)$ и $\rho(n)$ являются всюду определёнными на S интегрируемыми по Лебегу функциями с ограниченными компонентами. Представим набор элементов неизвестной матрицы Γ в виде удлинённого вектора-столбца

$$\gamma = \mathrm{col}(\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{31}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \Gamma_{32}, \Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{33}) \tag{5}$$

и введём вектор неизвестных оцениваемых параметров $q = \mathrm{col}(\gamma, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{12}$. Поставим задачу оценивания скалярной величины $l = a^\top q \in \mathbb{R}^1$ для различных заданных векторов $a \in \mathbb{R}^{12}$. В нашей задаче $a = e^{(\nu)}$, где $e^{(\nu)}$ — один из единичных координатных ортов из $\mathbb{R}^{12}$ с единицей на ν-м месте (что соответствует оценке каждой компоненты q) или $a = e^{(2)} + e^{(4)}$, $a = e^{(3)} + e^{(7)}$, $a = e^{(6)} + e^{(8)}$ (что соответствует оценке взаимных перекосов осей чувствительности ньютонометров [10]). Рассмотрим линейные оцениватели для $l = a^\top q$ вида

$$\tilde{l} = \int \Phi_0^\top(n) z(n) dS + \sum_{k=1}^{M} \Phi^{(k)\top} z(n^{(k)}), \tag{6}$$

где интеграл берётся по поверхности сферы S, $\Phi_0(n)$: $S \to \mathbb{R}^3$ — некоторая весовая функция, интегрируемая по Лебегу, а $\Phi^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ и $n^{(k)} \in S$, $k = 1, 2, \ldots, M$, — некоторые векторы и ориентации. В отличие от широко распространённой формы оценивателя этот оцениватель содержит не только интегральный член, но и слагаемые, зависящие от измерений при некоторых отдельных ориентациях.

Для простоты будем писать

$$\tilde{l} = \int \Phi^\top(n) z(n) dS,$$
$$\Phi(n) = \Phi_0(n) + \sum_{k=1}^{M} \Phi^{(k)} \delta(n - n^{(k)}),$$

где формально положим $\int f(n)\delta(n - n^{(k)}) dS = f(n^{(k)})$, т.е. что $\delta(n - n^{(k)})$ есть дельта-функция Дирака. Обозначим множество всех таких функций $\Phi(n)$ через Ω.

Величина

$$I(\Phi) = \sup_{q \in \mathbb{R}^{12},\, |\alpha_i(n)| \le \mu,\, |\rho_i(n)| \le \sigma,\, i=1,2,3} |\tilde{l} - l| \tag{7}$$

называется гарантированной ошибкой оценки.

При выбранном оценивателе это максимальное значение ошибки оценки при всевозможных значениях неопределённых факторов. Будем искать весовые коэффициенты $\Phi(n)$, минимизирующие гарантированную ошибку оценки, т.е. из решения следующей минимаксной задачи:

$$\inf_{\Phi(n) \in \Omega} \sup_{q \in \mathbb{R}^{12},\, |\alpha_i(n)| \le \mu,\, |\rho_i(n)| \le \sigma,\, i=1,2,3} |\tilde{l} - l|. \tag{8}$$

Такая задача называется задачей оптимального гарантирующего оценивания.

Таким образом, для решения задачи калибровки нужно решить 15 отдельных задач для всех указанных выше a. Интересно отметить, что привлечение нелинейных оценивателей в дополнение к линейным оценивателям вида (6) не приводит к уменьшению гарантированной ошибки оценки [8].

Нетрудно убедиться, что ошибка оценки имеет вид

$$\tilde{l} - l = \left(\int n \otimes \Phi(n) dS\right)^\top \gamma + \left(\int \Phi(n) dS\right)^\top \varepsilon +$$
$$+ \int (\hat{n}\Phi(n))^\top \alpha(n) dS + \int \Phi^\top(n) \rho(n) dS - a^\top q, \tag{9}$$

где γ определяется (5), а $\otimes$ есть символ кронекеровского произведения матриц.

Из (9) следует, что для конечности выражения (7) необходимо выполнение условия несмещённости

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS = a. \tag{10}$$

Введём покомпонентные обозначения:

$$\Phi(n) = \mathrm{col}(\Phi_1(n),\ \Phi_2(n),\ \Phi_3(n)), \quad n = \mathrm{col}(n_1,\ n_2,\ n_3).$$

Ясно, что верхняя грань в (8) явно вычисляется и гарантированная ошибка оценки определяется формулой

$$I(\Phi) = \sigma\int(|\Phi_1(n)| + |\Phi_2(n)| + |\Phi_3(n)|)dS +$$
$$+ \mu\int(|n_3\Phi_2(n) - n_2\Phi_3(n)| + |n_1\Phi_3(n) - n_3\Phi_1(n)| +$$
$$+ |n_2\Phi_1(n) - n_1\Phi_2(n)|)dS.$$

Таким образом, задача оптимального гарантирующего оценивания (8) сводится к следующей вариационной задаче:

$$\inf_{\Phi\in\Omega} I(\Phi) \quad \text{при условии несмещённости (10).}$$

Для дальнейшего анализа построенную выше вариационную задачу удобно представить в более простом структурном виде. Назовём эту модификацию задачей P.

Задача P.

$$I_0 = \inf_{\Phi,\Psi\in\Omega} \sigma\int\sum_{i=1}^{3}|\Phi_i(n)|dS + \mu\int\sum_{i=1}^{3}|\Psi_i(n)|dS$$

при условиях

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes \Phi(n) \\ \Phi(n) \end{pmatrix} dS = a, \quad \Psi(n) = \hat{n}\Phi(n),$$
$$\Psi(n) = \mathrm{col}(\Psi_1(n),\ \Psi_2(n),\ \Psi_3(n)).$$

3. Метод скаляризации состоит в том, что вместо трёхмерных измерений (3) рассматривается одномерное скалярное измерение

$$\bar{z}(n) = n^\top z(n) = n^\top(\Gamma + \hat{\alpha}(n))n + n^\top\varepsilon + n^\top\rho(n) =$$
$$= n^\top\Gamma n + n^\top\varepsilon + n^\top\rho(n), \quad n \in S. \tag{11}$$

При этом волевым образом устраняется помеха $\alpha(n)$, так как, очевидно, $n^\top\hat{\alpha}(n)n = 0$ [9, 10, 12]. Задача оптимального гарантирующего оценивания ставится по аналогичной схеме, описанной выше. Формально это соответствует введению дополнительного ограничения на оцениватель $\Phi(n)$:

$$\Phi(n) = n\chi(n), \quad \chi(n)\colon S \to \mathbb{R}^1,$$
$$\chi(n) = \chi_0(n) + \sum_{k=1}^{M}\chi^{(k)}\delta(n - n^{(k)}),$$

где $\chi_0(n)$ — скалярная интегрируемая на S функция, а $\chi^{(k)}$ — числа.

Тогда задача P сводится к более простой вариационной задаче относительно скалярной функции $\chi(n)$.

Задача Q.

$$J_0 = \inf_{\chi}\sigma\int(|n_1| + |n_2| + |n_3|)|\chi(n)|dS \tag{12}$$

при условии

$$\int \begin{pmatrix} n \otimes n\chi(n) \\ \chi(n) \end{pmatrix} dS = a. \tag{13}$$

Условия (13) содержат три повторяющихся равенства. Следовательно, для их совместности соответствующие компоненты a должны быть одинаковы. Это означает, что при скаляризации не все компоненты q являются наблюдаемыми. Действительно, из уравнения измерений (11) видно, что наблюдаемыми являются не все внедиагональные элементы Γ, а только суммы симметричных относительно главной диагонали элементов. Поэтому в задаче Q требуется оценить параметры $l = \bar{a}^\top\bar{q} \in \mathbb{R}^1$, где $\bar{q} = \mathrm{col}(\Gamma_{11},\ \Gamma_{22},\ \Gamma_{33},\ \Gamma_{12} + \Gamma_{21},\ \Gamma_{13} + \Gamma_{31},\ \Gamma_{23} + \Gamma_{32},\ \varepsilon) \in \mathbb{R}^9$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^9$ — заданный вектор.

При этом условия несмещённости (13) можно представить в более явном виде:

$$\begin{gathered}\int h(n)\chi(n)dS = \bar{a}, \\ h(n) = \mathrm{col}(n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ n_1n_2,\ n_1n_3,\ n_2n_3, \\ n_1,\ n_2,\ n_3) \in \mathbb{R}^9.\end{gathered} \tag{14}$$

Отметим, что в работах [9, 10] “скалярная” задача Q сформулирована более упрощённо: величина $|n_1| + |n_2| + |n_3|$ в (12) заменена на её оценку сверху $\sqrt{3}$.

Задача Q°.

$$\inf_{\chi}\sqrt{3}\sigma\int|\chi(n)|dS \text{ при условии (14).}$$

4. Решения задач Q и Q° совпадают (при соответствующих $\bar{a}$).

Теорема 1. *Решения задач Q и Q° совпадают. Более того, они единственны. Для параметров Γ_{11}, $\Gamma_{12} + \Gamma_{21}$, ε_1 эти решения определяются следующими импульсными функциями*:

$$\chi(n)_{\Gamma_{11}} = \frac{1}{2}[\delta(n - \mathrm{col}(1,\ 0,\ 0)) + \delta(n - \mathrm{col}(-1,\ 0,\ 0))],$$

$$\chi(n)_{\Gamma_{12}+\Gamma_{21}} = \frac{1}{2}\left[\delta\left(n - \mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\right) - \right.$$

$$-\delta\left(n-\mathrm{col}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\right)+$$
$$+\delta\left(n-\mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\right)-$$
$$-\delta\left(n-\mathrm{col}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)\right)\Bigg],$$
$$\chi(n)_{\varepsilon_1}=\frac{1}{2}[\delta(n-\mathrm{col}(1,\ 0,\ 0))-\delta(n-\mathrm{col}(-1,\ 0,\ 0))].$$

Для остальных параметров решения имеют ту же структуру, отличаясь очевидными модификациями. Доказательство теоремы 1 и последующей теоремы 2 опирается на теорию двойственности выпуклых вариационных задач.

5. Приведём решение задачи P.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Для параметров* Γ_{11}, ε_1 (*при всех значениях* μ) *и для* $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$ (*при* $\mu>(\sqrt{2}-1)\sigma$) *решение задачи* P *единственно и имеет вид* $\Phi(n)=\chi(n)n$, *где* $\chi(n)$ *— соответствующее решение задачи* Q. *При этом оптимальные ориентации и значения соответствующих гарантированных ошибок оценок в задачах* P *и* Q *совпадают.*

2) *Для параметра* $\Gamma_{12}+\Gamma_{21}$ *при* $\mu\le(\sqrt{2}-1)\sigma$ *решение задачи* P *имеет вид*

$$\Phi(n)=\mathrm{col}\left(\frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(0,\ 1,\ 0))-\right.$$
$$-\frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(0,-1,\ 0)),\ \frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(1,\ 0,\ 0))-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(-1,\ 0,\ 0)),\ 0\right),$$
$$\Psi_1(n)=\Psi_2(n)=0,\quad \Psi_3(n)=n_2\Phi_1(n)-n_1\Phi_2(n).$$

Если $\mu<(\sqrt{2}-1)\sigma$, *то оно единственно*; *при этом оптимальные ориентации в задачах* P *и* Q *различны*, *а гарантированная ошибка оценки в задаче* P *равна* $2\sigma+2\mu$, *что меньше гарантированной ошибки оценки в задаче* Q, *равной* $2\sqrt{2}\sigma$.

Если $\mu=(\sqrt{2}-1)\sigma$, *то решение задачи* P *неединственно*, *но гарантированные ошибки оценок в задачах* P *и* Q *совпадают и равны* $2\sqrt{2}\sigma$.

3) *Для параметра* Γ_{21} *решение задачи* P *единственно и имеет вид*

$$\Phi(n)=\mathrm{col}\left(0,\ \frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(1,\ 0,\ 0))-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\delta(n-\mathrm{col}(-1,\ 0,\ 0)),\ 0\right),$$
$$\Psi_1(n)=\Psi_2(n)=0,\quad \Psi_3(n)=-n_1\Phi_2(n).$$

Для параметров $\Gamma_{13}+\Gamma_{31}$, $\Gamma_{23}+\Gamma_{32}$ и остальных внедиагональных элементов матрицы Γ решения имеют такую же структуру, отличаясь очевидными модификациями.

Таким образом, для параметров Γ_{ii}, ε_i при всех μ и для $\Gamma_{ij}+\Gamma_{ji}$ при $\mu\ge(\sqrt{2}-1)\sigma$, $i,j=1,2,3$, $i\ne j$, метод скаляризации обоснован. А для $\mu<(\sqrt{2}-1)\sigma$ найдены более точные решения задачи P.

Из теорем 1 и 2 следует, что решения всех трёх рассматриваемых задач для всех нужных комбинаций параметров имеют импульсный характер с малым числом импульсов. Точки расположения этих импульсов в совокупности определяют оптимальный план экспериментов. Во всех задачах, включая задачу P при $\mu>(\sqrt{2}-1)\sigma$, оптимальный план содержит 18 ориентаций (угловых положений блока). При $\mu\le(\sqrt{2}-1)\sigma$ оптимальный план экспериментов в задаче P содержит 6 ориентаций. Таким образом, применение гарантирующего подхода позволяет из континуума ориентаций Q выбрать небольшое число наиболее информативных угловых положений блока ньютонометров, т.е. наряду с задачей оценивания одновременно решается задача о выборе оптимального плана экспериментов.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18–01–00054-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лидов М.Л.* К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов // Косм. исслед. 1964. Т. 2. № 5. С. 713–715.
2. *Красовский Н.Н.* К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // ПММ. 1964. Т. 28. № 1. С. 3–14.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
4. *Лидов М.Л.* Минимаксные методы оценивания. Препр. № 71. М.: Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, 2010.
5. *Бахшиян Б.Ц.*, *Назиров Р.Р.*, *Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.: Наука, 1980.
6. *Белоусов Л.Ю.* Оценивание параметров движения космических аппаратов. М.: Физматлит, 2002.
7. *Матасов А.И.* Метод гарантирующего оценивания. М.: Изд-во МГУ, 2009.
8. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht; Boston; L.: Springer Science + Business Media, 2013.

9. *Бобрик Г.И.*, *Матасов А.И.* Оптимальное гарантирующее оценивание параметров блока акселерометров // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 5. С. 8–14.
10. *Акимов П.А.*, *Деревянкин А.В.*, *Матасов А.И.* Гарантирующее оценивание и l_1-аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
11. *Браславский Д.А.*, *Поликовский Е.Ф.*, *Якубович А.М.* Метод калибровки трехосного блока акселерометров. Заявка на изобретение № 2422425/23 с приоритетом от 24 ноября 1976 г.
12. *Матасов А.И.* Некоторые задачи идентификации параметров в инерциальной навигации. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Мех.-мат. фак-т МГУ, 1982.
13. *Измайлов Е.А.*, *Лепе С.Н.*, *Молчанов А.В.*, *Поликовский Е.Ф.* Скалярный способ калибровки и балансировки бесплатформенных инерциальных навигационных систем. В сб.: Юбилейная XV Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. Сб. материалов. СПб.: ГНЦ РФ “ЦНИИ Электроприбор”, 2008. С. 145–154.

NONSMOOTH VARIATIONAL PROBLEMS FOR THE ACCELEROMETER UNIT CALIBRATION

A. I. Matasov

Lomonosov Moscow State University, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichiy March 11, 2019

Received March 18, 2019

Within the framework of the guaranteeing approach to estimation a new formalization for the accelerometer unit calibration problem is proposed. This problem reduces to the analysis of special variational problems. Based on the new formalization the scalarization method is justified; this method is widely used to calibrate the accelerometer unit. In particular, the limit of its applicability is determined.

Keywords: guaranteeing approach to estimation, accelerometer unit, calibration.