

УДК 532.526.2

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ПЛАСТИНЫ

Г. Н. Дудин\*, член-корреспондент РАН В. Я. Нейланд

Поступило 10.01.2019 г.

Рассмотрено обтекание скользящей пластины в режиме сильного взаимодействия в случае, когда давление на её задней кромке не является постоянным, а изменяется по поперечной координате. Показано, что в случае появления больших поперечных градиентов индуцированного давления существенно изменяется вид разложений функций течения в окрестности передней кромки и необходимо учитывать третий член разложений.

*Ключевые слова:* пространственный пограничный слой, скользящая пластина, сильное взаимодействие.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-5652487124-27>

Впервые в [1] при исследовании в режиме сильного вязко-невязкого взаимодействия течения в пограничном слое на пластине конечной длины было установлено, что разложение функций течения в окрестности передней кромки не является единственным, а содержит некоторую константу. В [2] было показано, что решение задачи вблизи передней кромки скользящей пластины также может быть неединственным. В [3, 4] указано на возможность образования трёхмерного течения в пограничном слое на пластине при нулевом угле скольжения в случае, когда давление на задней кромке зависит от поперечной координаты. В [5] впервые рассмотрено гиперзвуковое обтекание скользящей пластины конечной длины, когда дополнительное условие на её задней кромке не является постоянным по величине и построено двухчленное разложение в окрестности передней кромки.

В настоящей работе сформулирована и решена краевая задача для следующих (третьих) членов разложения. Показано, что в отличие от [4] в этом случае показатель степени только на единицу больше собственного числа, а множитель при соответствующих коэффициентах пропорционален производной от давления по поперечной координате. Следовательно, при наличии угла скольжения принципиально изменяется характер распространения возмущений в пространственном пограничном слое на пластине. В частности, в сечениях, в которых возмущение давления равно нулю, а градиент давления по размаху пластины не равен нулю, распро-

странение возмущений будет определяться только третьими членами разложений.

Рассматривается течение вязкого теплопроводного газа около бесконечной по размаху пластины заданной длины  $L$  в режиме сильного взаимодействия при температуре её поверхности  $T_w$ . Газ считается совершенным:  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , а коэффициент вязко-

сти  $\frac{\mu^0}{\mu_\infty} = \frac{C_\infty T^0}{T_\infty}$ , где  $C_\infty = \text{const}$ . Нижний индекс “ $\infty$ ” обозначает параметры в невозмущённом потоке. Компоненты скорости  $u^0, v^0, w^0$  в пограничном слое направлены соответственно вдоль осей  $x^0, y^0, z^0$  системы координат, начало которой расположено на передней кромке пластины. Ось  $x^0$  направлена перпендикулярно передней кромки, а ось  $z^0$  — вдоль неё. Угол скольжения  $\beta$  — это угол между направлением невозмущённого потока и осью  $x^0$ . На задней кромке пластины ( $x^0 = L$ ) задано распределение давления  $p_d^0(z^0)$ . Масштаб области изменения давления по поперечной координате порядка  $L_z$ ,

а отношение характерных масштабов  $N = \frac{L}{L_z}$ . Считается, что для проекции числа Маха на нормаль к передней кромке выполняется условие  $M_n = M_\infty \cos\beta \gg 1$ . Согласно гиперзвуковой теории малых возмущений [6] при  $M_n \gg 1$  и безразмерной толщине пограничного слоя  $\delta = \text{Re}_0^{-1/4} \ll 1$ , в случае когда  $M_n \delta \gg 1$ , индуцированное давление имеет порядок  $p^0 \sim p_\infty M_n^2 \delta^2$  и плотность газа  $\rho^0 \sim \rho_\infty \delta^2$ , где  $\text{Re}_0 = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_0}$  — число Рейнольдса, а  $\mu_0$  — коэффициент вязкости при температуре торможения. Для течения около скользящей пластины масштаб по-

Центральный аэродинамический институт  
им. Н.Е. Жуковского, Жуковский Московской обл.  
\*E-mail: [gndudin@yandex.ru](mailto:gndudin@yandex.ru)

перечного компонента скорости  $w^0 \sim u_\infty \sin\beta$ . Заметим, что при отсутствии угла скольжения скорость поперечного течения определяется только градиентом индуцированного давления по размаху пластины [3]. При  $M_\infty \delta \gg 1$  для вычисления давления можно использовать формулу “касательного клина” [6]. В соответствии с оценками для пограничного слоя [5, 6] вводятся безразмерные переменные, учитываются особенности поведения функций течения около передней кромки и преобразование А.А. Дороницына:

$$\begin{aligned} x^0 &= Lx, & y^0 &= \delta Ly, & z^0 &= L_z z, \\ \mu^0 &= \mu_0 \mu, & \delta_e^0 &= L\delta \delta_e^*, & \rho^0 &= \rho_\infty \delta^2 \rho, \\ p^0 &= \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2 p^*, & p_d^0 &= \rho_\infty u_\infty^2 \delta^2 p_d, \\ u^0 &= u_\infty u, & w^0 &= u_\infty w, & v^0 &= u_\infty \delta v^*, \end{aligned}$$

$$H^0 = 0,5u_\infty^2 H, \quad H_w^0 = 0,5u_\infty^2 H_w, \quad \lambda = \int_0^y \rho dy,$$

$$v_\delta = \rho v^* + u \frac{\partial \lambda}{\partial x} + Nw \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

$$\lambda = x^{1/4} \lambda^*, \quad p_* = x^{-1/2} p(x, z), \quad \rho = x^{-1/2} \rho^*(x, \lambda^*, z),$$

$$\delta_e^* = x^{3/4} \delta_e(x, z), \quad v_\delta = x^{-3/4} \left( v^* - xu \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} \right),$$

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} p(x, z) \eta,$$

$$v^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} p(x, z) \left[ v + \frac{x\eta}{2p} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + Nw \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right].$$

В указанных переменных краевая задача для пространственного пограничного слоя принимает вид

$$\begin{aligned} xu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} + Nxw \frac{\partial u}{\partial z} = \\ = \frac{\gamma-1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} xu \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial \eta} + Nxw \frac{\partial w}{\partial z} = \\ = -N \frac{\gamma-1}{2\gamma} (H - u^2 - w^2) \frac{x}{p} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xu \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial \eta} + Nxw \frac{\partial H}{\partial z} = \\ = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 (u^2 + w^2)}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + Nx \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{x}{2p} \left( u \frac{\partial p}{\partial x} + Nw \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{u}{4} = 0, \\ p(x, z)|_{x=1} = p_d(z), \end{aligned}$$

$$p = \frac{\gamma+1}{2} \left[ \left( \frac{3}{4} \delta_e + x \frac{\partial \delta_e}{\partial x} \right) \cos\beta + Nx \frac{\partial \delta_e}{\partial z} \sin\beta \right]^2,$$

$$\delta_e = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma p}} \int_0^\infty (H - u^2 - w^2) d\eta,$$

$$\eta = 0: u = w = v = 0, \quad H = H_w,$$

$$\eta \rightarrow \infty: u \rightarrow \cos\beta, \quad w \rightarrow \sin\beta,$$

$$H \rightarrow 1 \quad (0 \leq x \leq 1, |z| < \infty).$$

Здесь  $H$  — полная энтальпия, а  $\sigma$  — число Прандтля. Так как поперечное течение в пограничном слое при  $\beta \neq 0$  существует изначально, то решение системы (1) в окрестности передней кромки в трёхчленном разложении можно искать в виде

$$p(x, z) = p_0 + p_\alpha(z) x^\alpha + N \frac{dp_\alpha(z)}{dz} p_{\alpha 1} x^{\alpha+1} + \dots, \quad (2)$$

$$\delta_e(x, z) = \delta_0 + \delta_\alpha \frac{p_\alpha(z)}{p_0} x^\alpha + \frac{N}{p_0} \frac{dp_\alpha(z)}{dz} \delta_{\alpha 1} x^{\alpha+1} + \dots,$$

$$\begin{aligned} f(x, \eta, z) = f_0(\eta) + f_\alpha(\eta) \frac{p_\alpha(z)}{p_0} x^\alpha + \\ + N \frac{dp_\alpha(z)}{dz} f_{\alpha 1}(\eta) x^{\alpha+1} + \dots, \end{aligned}$$

где  $f = (u, v, w, H)$ , а нижним индексом “0” обозначены члены разложений, соответствующие автомодельному решению для полубесконечной пластины, и предполагается, что  $\alpha > 0$ . Следует отметить, что разложение (2) принципиально отличается от случая обтекания пластины при отсутствии угла скольжения [4]. Во-первых, как установлено в [3, 4], в разложении для  $w(x, \eta, z)$  при  $\beta = 0$  первые два коэффициента разложения (2) оказываются тождественно равными нулю, во-вторых, для остальных функций течения показатель степени в третьих членах разложения равен  $2\alpha$ , а в качестве множителя

в них входит величина  $\left( \frac{p_\alpha(z)}{p_0} \right)^2$ . Следовательно, при наличии угла скольжения третьи члены разложения (2)  $\sim x^{\alpha+1} \frac{dp_\alpha(z)}{dz}$  могут существенно влиять на передачу возмущений против потока, особенно в тех сечениях  $z = \text{const}$ , где  $|p_\alpha(z)|$  достаточно мало. Заметим также, что собственное число  $\alpha$  уменьшается с увеличением угла скольжения [5]. После подстановки (2) в систему (1) получаем соответствующие краевые задачи. Систему уравнений для первых членов разложения (автомодельная часть) получаем из (1), если в ней положить  $x = 0$ . Впервые автомодельное решение при  $\sigma = 1$  было построено в [7]. Для вторых членов разложения краевая задача, которая позволяет определить значение собственного числа,

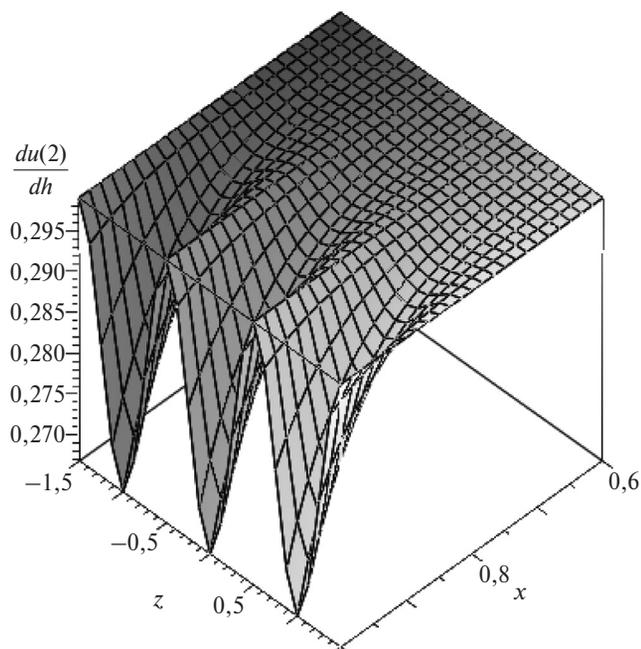


Рис. 1. Зависимость коэффициента  $\frac{du(2)}{dh}$  на поверхности пластины ( $0,6 \leq x \leq 1$ ) при  $p_\alpha(z) = 0,0175 \cos^2(\pi z)$ .

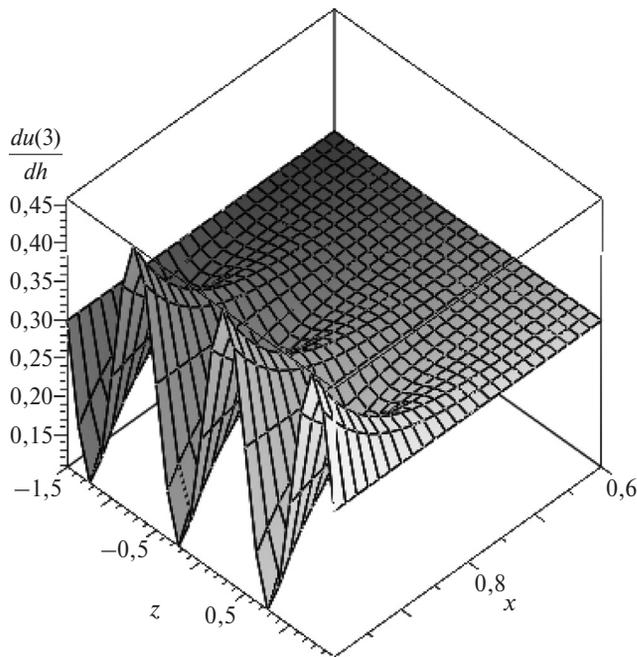


Рис. 2. Зависимость коэффициента  $\frac{du(3)}{dh}$  на поверхности пластины ( $0,6 \leq x \leq 1$ ) при  $p_\alpha(z) = 0,0175 \cos^2(\pi z)$ .

и некоторые результаты расчётов приведены в [5]. Для третьих членов разложения получаем

$$\begin{aligned} & \frac{dv_{\alpha 1}}{d\eta} + \left(\alpha + \frac{5}{4}\right)u_{\alpha 1} + w_\alpha + \\ & + \frac{1}{2}(w_0 + (\alpha + 1)p_{\alpha 1}u_0) = 0, \quad (3) \\ & v_0 \frac{du_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1} \frac{du_0}{d\eta} + (\alpha + 1)u_0 u_{\alpha 1} + w_0 u_\alpha = \\ & = \frac{\gamma - 1}{4\gamma}(H_{\alpha 1} - 2u_0 u_{\alpha 1} - 2w_0 w_{\alpha 1} - \\ & - 2(\alpha + 1)p_{\alpha 1}(H_0 - u_0^2 - w_0^2)) + \frac{d^2 u_{\alpha 1}}{d\eta^2}, \\ & v_0 \frac{dH_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1} \frac{dH_0}{d\eta} + (\alpha + 1)u_0 H_{\alpha 1} + w_0 H_\alpha = \\ & = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2 H_{\alpha 1}}{d\eta^2} - 2 \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{d^2 (u_0 u_{\alpha 1} + w_0 w_{\alpha 1})}{d\eta^2}, \\ & v_0 \frac{dw_{\alpha 1}}{d\eta} + v_{\alpha 1} \frac{dw_0}{d\eta} + (\alpha + 1)u_0 w_{\alpha 1} + w_0 w_\alpha = \\ & = -\frac{\gamma - 1}{2\gamma}(H_0 - u_0^2 - w_0^2) + \frac{d^2 w_{\alpha 1}}{d\eta^2}, \\ & \delta_{\alpha 1} = \frac{12[(0,75 + \alpha)p_{\alpha 1} \cos \beta - \sin \beta]}{(7 + 4\alpha)(6 + 8\alpha) \cos \beta} \delta_0, \\ & p_{\alpha 1} = \frac{1}{5 + 2\alpha} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{\int_0^\infty (H_{\alpha 1} - 2u_0 u_{\alpha 1} - 2w_0 w_{\alpha 1}) d\eta}{\int_0^\infty (H_0 - u_0^2 - w_0^2) d\eta} + \frac{6}{3 + 4\alpha} \operatorname{tg} \beta \right], \\ & \eta = 0: u_{\alpha 1} = w_{\alpha 1} = v_{\alpha 1} = H_{\alpha 1} = 0; \\ & \eta \rightarrow \infty: u_{\alpha 1} \rightarrow 0, w_{\alpha 1} \rightarrow 0, H_{\alpha 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

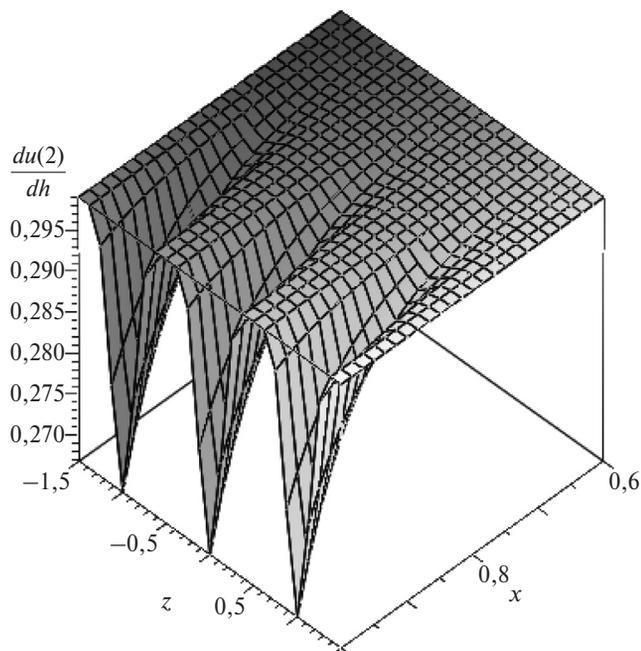
Система уравнений (3) является линейной и неоднородной с нулевыми граничными условиями и содержит параметр  $p_{\alpha 1}$ , значение которого определяется из интегрального соотношения, полученного в результате разложения в ряды индуцированного давления и толщины вытеснения, причём коэффициент  $p_{\alpha 1}$  не зависит от координаты  $z$ .

В настоящей работе приведены величины, пропорциональные коэффициенту трения в продольном направлении на пластине при  $H_w = 1, \sigma = 1, \gamma = 1,4, \beta = 45^\circ, N = 1$ . Для значений функции  $p_\alpha(z) = 0,0175 \cos^2(\pi z)$  на рис. 1 представлено

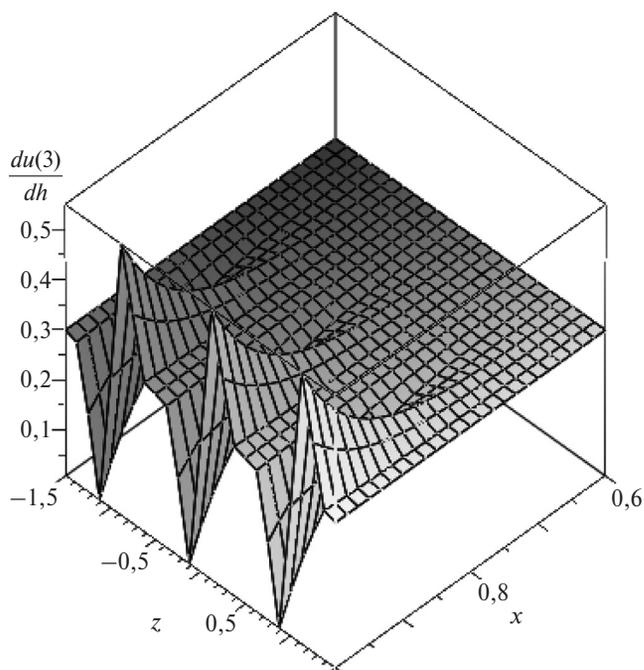
$$\frac{du(2)}{d\eta} = \frac{du_0}{d\eta} + \frac{p_\alpha(z)}{p_0} \frac{du_\alpha}{d\eta} x^\alpha$$

(двухчленное разложение), а на рис. 2

$$\frac{du(3)}{d\eta} = \frac{du_0}{d\eta} + \frac{p_\alpha(z)}{p_0} \frac{du_\alpha}{d\eta} x^\alpha + \frac{N}{p_0} \frac{dp_\alpha(z)}{dz} \frac{du_{\alpha 1}}{d\eta} x^{\alpha+1}$$



**Рис. 3.** Зависимость коэффициента  $\frac{du(2)}{d\eta}$  на поверхности пластины ( $0,6 \leq x \leq 1$ ) при  $p_\alpha(z) = 0,0175 \cos^6(\pi z)$ .



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента  $\frac{du(3)}{d\eta}$  на поверхности пластины ( $0,6 \leq x \leq 1$ ) при  $p_\alpha(x) = 0,0175 \cos^6(\pi z)$ .

(трёхчленное разложение). Для значений функции  $p_\alpha(z) = 0,0175 \cos^6(\pi z)$  на рис. 3 представлено  $\frac{du(2)}{d\eta}$ , а на рис. 4 —  $\frac{du(3)}{d\eta}$ . Приведённые данные показывают, что при наличии угла скольжения необходимо учитывать третий член разложения, а сама величина производной  $\frac{dp_\alpha(z)}{dz}$  существенно влияет на характеристики течения.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счёт гранта РФФИ (№ 18–01–00211).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Нейланд В.Я.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 3. С. 40–49.
2. *Козлова И.Г., Михайлов В.В.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 6. С. 94–99.
3. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* // Изв. РАН. МЖГ. 2018. № 1. С. 89–90.
4. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* // Уч. зап. ЦАГИ. 2018. Т. XLIX. № 5. С. 3–16.
5. *Дудин Г.Н., Нейланд В.Я.* // ДАН. 2018. Т. 483. № 1. С. 33–36.
6. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
7. *Whalen R.J.* // JASS. 1959. V. 26. № 12. P. 839–841.

**ABOUT THE FEATURES OF HYPERSONIC FLOW PAST A YAWED PLATE**

**G. N. Dudin, Corresponding Member of the RAS V. Ya. Neyland**

*The Central AeroHydrodynamic Institute named after Prof. N.E. Zhukovsky, Zhukovsky, Moscow Region, Russian Federation*

Received January 10, 2019

The flow around the yawed plate in the regime of strong interaction is considered in the case when the pressure at its trailing edge is not constant, but changes along the transverse coordinate. It is shown that in the case of large transverse gradients of the induced pressure, the type of expansions of flow functions in the vicinity of the leading edge changes significantly and the third term of the expansions should be taken into account.

*Keywords:* three-dimensional boundary layer, yawed plate, strong interaction.