ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 1, с. 28–31

МЕХАНИКА

УДК 534.222

О СПОНТАННО ИЗЛУЧАЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ

Академик РАН А. Г. Куликовский[1], А. Т. Ильичев[1,*],
А. П. Чугайнова[1], В. А. Шаргатов[2]

Поступило 21.02.2019 г.

Построено решение, представляющее структуру спонтанно излучающей ударной волны, и исследована её устойчивость в линейном приближении. Найдены линейные волны возмущений, которые могут распространяться по структуре, и волны, излучающиеся в область течения за структурой, т.е. волны, соответствующие спонтанному излучению возмущений ударной волной, рассматриваемой как поверхность разрыва.

Ключевые слова: ударные волны, устойчивость ударных волн, спонтанное излучение возмущений, структура ударной волны, устойчивость структуры.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652487128-31

При изучении линейной устойчивости ударных волн в газах [1–4] было показано, что в зависимости от вида уравнения состояния ударные волны могут быть устойчивыми, неустойчивыми или нейтрально устойчивыми. В последнем случае соотношения на разрыве таковы, что по поверхности ударной волны могут распространяться незатухающие волны возмущений формы поверхности ударной волны, скорость которых больше скорости акустических возмущений, распространяющихся за волной в направлении, параллельном волне. Возмущения, бегущие по поверхности ударной волны, порождают в пространстве за ударной волной незатухающие при удалении от ударной волны возмущения (акустическую, вихревую и энтропийную волны). Это послужило основанием назвать такую ударную волну спонтанно излучающей ударной волной (СИУВ) [1, 4].

Описанное выше явление спонтанного излучения возмущений вызывает интерес исследователей, тем более что в последнее время при изучении сильных ударных волн было обнаружено достаточно много ситуаций, когда ударные волны соответствуют условиям спонтанного излучения [5–9].

Сверхзвуковое распространение возмущений по поверхности ударной волны на первый взгляд выглядит необычно, поскольку никакое возмущение из конечной области за фронтом ударной волны не может догонять и поддерживать это быстро распространяющееся возмущение. Это обстоятельство было отмечено в [10] и послужило основанием для сделанного в этой работе вывода: “...спонтанных возмущений фронта ударной волны не существует. Такие волны не удовлетворяют принципу причинности”. Однако в этой работе и в [11], где рассматривается взаимодействие СИУВ с возмущениями в нелинейном приближении, не приводятся указания, касающиеся математических постановок задач о взаимодействии СИУВ с возмущениями произвольного типа. В [5, 6] для выяснения вопроса о поведении СИУВ при взаимодействии с возмущениями были проведены подробные численные исследования ряда задач. В результате рассмотрения полученных решений был сформулирован вывод: “В целом во всех рассмотренных случаях излучение звука ударной волной являлось вынужденным, а спонтанная (не обусловленная внешними воздействиями) генерация акустических волн не наблюдалась. Это позволяет предположить невозможность спонтанного излучения звука ударной волной даже в случае её нейтральной неустойчивости”. Вывод фактически совпадает с процитированным выше заключением работы [10]. Остался открытым вопрос о том, почему не наблюдаются предсказанные теорией спонтанно излучающие, свободные от внешних возмущений бегущие по ударной волне линейные волны возмущений. Если принимается точка зрения, что они не существуют, то не ясно, как следует изменить дисперсионное уравнение для линейных возмущений, чтобы это уравнение исключало возможность образования спонтанного излучения возмущений.

В работе [12] для выяснения вопроса о существовании и свойствах волн линейных возмущений, бегущих по поверхности СИУВ, было предложено

[1] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*
[2] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва*
**E-mail*: ilichev@mi-ras.ru

рассмотреть структуру СИУВ, а также волны, которые распространяются в этой структуре и излучаются ниже по течению. В этом случае, если устремить к нулю эффективную ширину структуры, отнесённую к длине волны возмущений, то должна получиться реальная картина волн, соответствующая СИУВ.

В данной работе принята простейшая модель структуры СИУВ и построено решение, представляющее эту структуру. Численно построено линеаризованное решение, представляющее синусоидальную волну, бегущую по структуре и излучающую в область за ней (т.е. в область ниже по потоку) незатухающие по пространству возмущения.

Для структуры была выбрана следующая модель. Структура разрыва состоит из расположенной впереди ударной волны и одномерного стационарного течения за ней. Головная ударная волна — это обычная устойчивая ударная волна в совершенном газе. За этой головной ударной волной следует течение, описываемое дифференциальными уравнениями, выражающими сохранение потоков массы, импульса и энергии. Кроме того, считается, что в потоке за головной ударной волной происходят процессы релаксации, в результате которых показатель адиабаты γ уменьшается от значения на головной ударной волне до некоторого заданного значения. Это уменьшение в принятой модели описывается простым дифференциальным уравнением релаксационного типа:

$$\frac{df}{dt} = -\lambda(f - f_e(p, V)), \tag{1}$$
$$f \equiv \gamma - 1, \quad \lambda = \text{const}, \quad V = \frac{1}{\rho}.$$

Здесь $\dfrac{d}{dt}$ — субстанциональная производная. В невозмущённом течении в структуре законы сохранения позволяют в явном виде найти величины ρ, v_x, v_y, ε как функции $f \equiv \gamma - 1$ (ось x направлена по нормали, а ось y лежит в плоскости головной волны). Зависимость x от f определяется квадратурой уравнения релаксации. На прямой Рэлея—Михельсона, проведённой на плоскости V, p через начальную точку V_1, p_1 (состояние *1*) и точку, вдали за структурой, V_2, p_2 (состояние *2*), функция $f_e(p, V)$ задавалась вместе со своими частными производными. Переход из состояния *1* в состояние *2* с учётом производных $\dfrac{\partial f_e}{\partial V}$ и $\dfrac{\partial f_e}{\partial p}$, вычисляемых в состоянии *2*, соответствует СИУВ.

Ниже качественно описаны результаты построения решений для возмущений некоторой конкретной структуры СИУВ.

Малые возмущения структуры СИУВ и смещение положения головной ударной волны в направлении оси x от невозмущённого положения $x = 0$ будем представлять в виде

$$U_q(x, y, t) = u_q(x)e^{i(k_y y - \omega t)}, \tag{2}$$
$$x = \xi e^{i(k_y y - \omega t)}, \quad \xi = \text{const},$$

где $U_q(x, y, t)$, $q = 1, \ldots, 5$, — малые возмущения величин ρ, v_x, v_y, ε, f.

Далее k_y считается действительным, а ω — в общем случае — комплексным. Функции $u_q(x)$ удовлетворяют системе пяти обыкновенных уравнений. Эти уравнения получены после подстановки равенств (2) в систему уравнений газовой динамики и уравнения (1), линеаризованных на фоне решения, представляющего структуру. Общее решение представляет линейную комбинацию пяти линейно независимых решений этих уравнений:

$$u_q(x) = \sum_{p=1}^{5} C_p u_{pq}(x), \quad p, q = 1, \ldots, 5. \tag{3}$$

Граничные условия представляют линеаризацию пяти условий на головной ударной волне, выражающих непрерывность f и законы сохранения массы, импульса (два уравнения) и энергии. Пять линейных однородных алгебраических уравнений связывают шесть неизвестных констант $u_q(0)$ ($q = 1, \ldots, 5$) и ξ. Для получения дисперсионного уравнения необходимо воспользоваться условием отсутствия приходящего возмущения из области больших значений x.

Выберем систему линейно независимых решений $u_{1q}(x)$, $u_{2q}(x)$, ..., $u_{5q}(x)$ таким образом, чтобы они соответствовали различным волнам возмущений: акустическим, вихревым, возмущениям плотности и возмущениям f. При больших значениях x (где фоновое течение однородно) каждое из возмущений представляется определённым столбцом констант (характеризуется номером p), умноженным на соответствующую этому типу возмущений экспоненту от x:

$$u_{pq}(x) = \hat{u}_{pq} e^{ik_p x}, \quad \hat{u}_{pq} = \text{const}. \tag{4}$$

Среди пяти типов возмущений вида (2) имеется только одно возмущение (акустическое), которое может приходить из области больших значений x. Обозначим соответствующий этому возмущению столбец констант как $\hat{u}_{5q}$. Условие устойчивости требует рассмотрения случая, когда приходящего возмущения нет, а имеются только четыре возмущения, уходящих от ударной волны и её структуры. При больших значениях x это означает, что соответствующий вектор $\hat{u}_q$ может быть разложен по векторам $\hat{u}_{1q}, \hat{u}_{2q}, \hat{u}_{3q}, \hat{u}_{4q}$.

Можно также сформулировать это условие следующим образом. Найдём вектор $\hat{u}_q^*$, ортогональный линейному подпространству, натянутому на упомянутые четыре вектора. Тогда при больших x условие отсутствия приходящего возмущения можно записать как условие ортогональности векторов $\hat{u}_q$ и $\hat{u}_q^*$:

$$(\hat{u}_q,\ \hat{u}_q^*) = 0. \qquad (5)$$

Если ударная волна рассматривается как поверхность разрыва, разделяющая состояния *1* и *2*, то при отсутствии структуры соотношения (4) будут выполняться всюду за ударной волной. Граничные условия на этой ударной волне вместе с условием (5), как известно, приводят к дисперсионному уравнению, определяющему значение $\frac{\omega}{k_y}$.

Параметры течения подобраны таким образом, что ударная волна, соответствующая переходу $1 \to 2$, спонтанно излучающая, т.е. дисперсионное уравнение имеет действительный корень

$$\frac{\omega}{k_y} = W. \qquad (6)$$

Если волна, представляющая переход от состояния *1* к состоянию *2*, имеет описанную выше структуру, то отсутствие приходящего из области больших x возмущения обеспечивается при больших значениях x тем же условием (5), что и в случае ударной волны, представляемой как поверхность (скачок). Условие отсутствия приходящего из области больших x акустического возмущения может быть также записано как условие при конечных значениях x. Оно заключается в том, что решение должно представляться суммой (2) по p четырёх слагаемых, которые соответствуют приходящим возмущениям, определённым при больших значениях x.

При каждом фиксированном значении x (в том числе при $x = 0$) решение $u_q(x)$, состоящие из четырёх уходящих волн, должно принадлежать четырёхмерному пространству, натянутому на векторы $u_{1q}(x)$, $u_{2q}(x), u_{3q}(x), u_{4q}(x)$. Если найти вектор $u_q^*(0)$, ортогональный векторам $u_{1q}(0)$, $u_{2q}(0)$, $u_{3q}(0)$, $u_{4q}(0)$, то условие ортогональности векторов $u_q(0)$ и $u_q^*(0)$, выражающее условие отсутствия приходящего возмущения, запишется в виде

$$(u_q(0),\ u_q^*(0)) = 0. \qquad (7)$$

Если под $u_q(0)$ понимать произвольный вектор в пятимерном пространстве, то для того чтобы он представлял состояние за головной ударной волной при отсутствии приходящего возмущения, его компоненты и величина ξ должны удовлетворять четырём условиям, выражающим линеаризованные законы сохранения на ударной волне, условию непрерывности f и условию (7). Равенство нулю определителя полученной системы алгебраических уравнений приводит к дисперсионному уравнению вида

$$D(\omega,\ k_y) = 0. \qquad (8)$$

Такие вычисления были проделаны. Детали вычислений предполагается опубликовать отдельно.

Уравнение (8) имеет корень, соответствующий корню (6) дисперсионного уравнения СИУВ следующего вида:

$$\frac{\omega}{k_y} = W - i\frac{\Delta\omega}{k_y}. \qquad (9)$$

Оказалось, что $\mathrm{Re}\frac{\Delta\omega}{k_y} > 0$. Величина $\frac{\Delta\omega}{k_y}$ пропорциональна произведению $k_y\delta$ (при малых $k_y\delta$), где $\delta = \frac{1}{\lambda v}$, v — характерная скорость, которая принимается как скорость при $x \to \infty$.

Таким образом, для рассматриваемой СИУВ в рамках принятых предположений показано следующее:

1. Структура СИУВ существует и устойчива. Найдена скорость затухания синусоидальных возмущений, которая стремится к нулю при $k_y\delta \to 0$.

2. Построены решения, описывающие синусоидальные волны, распространяющиеся по структуре СИУВ, и возмущения ниже по потоку, которые порождаются этими волнами, т.е. волны спонтанного излучения возмущений.

3. При $k_y\delta \to 0$, т.е. в случае когда ширина структуры пренебрежимо мала, предельная картина малых возмущений структуры СИУВ полностью соответствует тем возмущениям, которые предсказываются классической линейной теорией в отношении СИУВ [1–4]. В частности, фазовая и групповая скорости оказались равными одному и тому же значению W (6), что также соответствует классическим результатам.

Последнее означает возможность распространения со скоростью W по поверхности СИУВ возмущений произвольной формы с соответствующими уходящими от ударной волны возмущениями. Таким образом, точка зрения, высказанная в [10], относительно невозможности распространения возмущений по ударной волне, если они не поддерживаются приходящими из потока газа возмущениями, не подтвердилась. Как показывает предельный переход $k_y\delta \to 0$, ударная волна (поверхность нулевой ширины) оказалась способной сама по себе быть проводником возмущений.

В связи с этим выскажем точку зрения, почему сверхзвуковая передача возмущений по ударной волне возможна. Существенно, что граничные условия на ударной волне, которые выставляются независимо в каждой точке ударной волны, содержат производные $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\xi}{\partial y}$. При этом считается, что $\xi(y, t)$ — непрерывная дифференцируемая функция. Это и служит причиной передачи возмущений вдоль ударной волны. Если исключить из соотношений на СИУВ все величины кроме функции $\xi(y, t)$, то для ξ получится волновое уравнение со скоростями распространения волн $\pm W$.

Можно также отметить, что хотя ударная волна как поверхность разрыва лишена массы, через неё идёт поток энергии, часть которого может расходоваться на возбуждение уходящих возмущений.

Результаты представленной работы, хотя они и относятся к конкретной ударной волне и определённой её структуре, дают основания для реабилитации классических представлений о поведении спонтанно излучающих ударных волн (во всяком случае какой-то части таких ударных волн).

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 17–01–00180).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дьяков С.П.* // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. В. 3. С. 288–295.
2. *Конторович В.М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. В. 6. С. 1525–1526.
3. *Иорданский С.В.* // ПММ. 1957. Т. 21. В. 4. С. 456–472.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. *Конюхов А.В., Лихачев А.П., Фортов В.Е., Хищенко Н.В., Анисимов С.И., Опарин А.М., Ломоносов И.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. В. 1. С. 28–34.
6. *Конюхов А.В., Лихачев А.П., Фортов В.Е., Опарин А.М., Анисимов С.И., Фортов В.Е.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 125. В. 4. С. 927–937.
7. *Bates J.W., Montgomery D.C.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 6. P. 1180–1183.
8. *Bates J.W.* // Physi. Rev. E. 2015. V. 91. 013014.
9. *Fomin V.M., Yakovlev V.I.* // Shock Waves. 2018. https://doi.org/10.1007/s00193-018-0856-7
10. *Кузнецов Н.М.* // УФН. 1989. Т. 159. В. 3. С. 493–526.
11. *Кузнецов Н.М.* // ЖЭТФ. 1986. В. 2. С. 744–753.
12. *Куликовский А.Г.* // ДАН. 2018. Т. 481. № 5. С. 494–497.

ON SPONTANEOUSLY RADIATING SHOCK WAVES

Academician of the RAS A. G. Kulikovskiy[1], A. T. Il'ichev[1], A. P. Chugainova[1], V. A. Shargatov[2]

[1] *Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[2] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

Received February 21, 2019

A solution representing the structure of a spontaneously radiating shock wave is constructed and its stability in the linear approximation is investigated. Linear waves of perturbations that can propagate through the structure and waves radiating into the flow region behind the structure are found, i.e. there are waves corresponding to the spontaneous radiation of perturbations by a shock wave considered as a discontinuity surface.

Keywords: shock waves, shock waves stability, spontaneous radiation of perturbations, shock wave structure, shock wave structure stability.