

УДК 517.9

О ПОТОКЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Т. В. Дудникова

Представлено академиком РАН Б.Н. Четверушкиным 28.03.2019 г.

Поступило 28.03.2019 г.

Рассматривается динамика гармонического кристалла в полупространстве с нулевым граничным условием. Предполагается, что начальные данные являются случайной функцией. Доказана сходимость распределений решений к некоторой предельной мере при больших временах. Выведена формула для предельной плотности потока энергии (в среднем). Дано приложение результатов к случаю гиббсовских начальных мер. Найдены стационарные неравновесные состояния, в которых существует ненулевой поток тепла, проходящий через точки кристалла.

Ключевые слова: гармонический кристалл в полупространстве, случайные начальные данные, слабая сходимость мер, гиббсовские меры, поток энергии, неравновесные состояния.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524873235-237>

В работе изучается динамика гармонического кристалла в полупространстве $\mathbb{Z}_+^d = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 > 0\}$, $d \geq 1$,

$$\ddot{u}(x, t) = - \sum_{y \in \mathbb{Z}_+^d} (V(x - y) - V(x - y_-)) u(y, t), \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^d, t \in \mathbb{R},$$

где $y_- = (-y_1, y_2, \dots, y_d)$, с нулевым граничным условием (при $x_1 = 0$)

$$u(x, t)|_{x_1=0} = 0 \quad (2)$$

и с начальными условиями (при $t = 0$)

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{Z}_+^d. \quad (3)$$

Здесь $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_N(x, t))$, $u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, $V(x)$ — матрица взаимодействия (или сила). Предполагается, что начальные данные $Y_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$ являются измеримой случайной функцией с распределением μ_0 . Через μ_t , $t \in \mathbb{R}$, обозначим распределение решений $Y(x, t) = (u(x, t), \dot{u}(x, t))$. Одной из целей работы является доказательство слабой сходимости мер μ_t к некоторой предельной мере μ_∞ при $t \rightarrow \infty$:

$$\mu_t \rightarrow \mu_\infty, \quad t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Мы применяем полученные результаты к случаю, когда некоторые бесконечные области кристалла вида

$$D_n = \{x \in \mathbb{Z}_+^d : (-1)^{n_1} x_1 > a, \dots, (-1)^{n_k} x_k > a\}, \quad (5)$$

$$n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{N}^k,$$

(где $\mathcal{N}^k := \{n = (n_1, \dots, n_k) : n_1 = 2, n_2, \dots, n_k \in \{1, 2\}\}$, a и k — некоторые фиксированные числа, $a > 0$, $k \in \{1, \dots, d\}$) имеют гиббсовские распределения с температурами T_n . В этом случае мы вычисляем координаты предельной плотности потока энергии $J_\infty = (J_\infty^1, \dots, J_\infty^d)$ и получаем, что $J_\infty^l = 0$, если $l = 1, k + 1, \dots, d$, и

$$J_\infty^l \equiv J_\infty^l(x_1) = -c_l(x_1) \cdot 2^{-k+1} \sum (T_n|_{n_l=2} - T_n|_{n_l=1}), \quad (6)$$

если $l = 2, \dots, k$.

Здесь суммирование берётся по всем $n_2, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_k \in \{1, 2\}$, $c_l(x_1)$ — некоторые положительные функции, определённые ниже в формуле (7).

Изучению сходимости к неравновесным состояниям и теплопроводности для различных систем посвящено большое количество работ (см. обзорные статьи [1, 2] для подробного списка литературы). В одномерном случае результаты, аналогичные (4) и (6), были получены в работах [3, 4] для бесконечной цепочки гармонических осцилляторов. В многомерном случае для гармонических кристаллов во всём пространстве сходимость (4) впервые была доказана в работе [5] для трансляционно-инвариантных начальных мер. В данной работе мы обобщаем результаты работ [6, 7] на случай гармониче-

ских кристаллов в полупространстве и на более общий класс начальных мер.

1. ГЛАВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Предполагается, что матрица $V(x) = (V_{kl}(x))$, $k, l = 1, \dots, N$, в уравнении (1) удовлетворяет следующим условиям A1–A3.

A1. $V_{lk}(-x) = V_{kl}(x) \in \mathbb{R}$, $k, l = 1, 2, \dots, N$, $x \in \mathbb{Z}^d$. Существуют константы $C, \gamma > 0$ такие, что $|V_{kl}(x)| \leq Ce^{-\gamma|x|}$ для всех $x \in \mathbb{Z}^d$.

A2. $\hat{V}(\theta) \geq 0$ при всех $\theta \in \mathbb{T}^d$ и $\|\hat{V}^{-1}(\theta)\| \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Здесь через $\hat{V}(\theta)$ обозначается дискретное преобразование Фурье функции $V(x)$, $\hat{V}(\theta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} e^{ix \cdot \theta} V(x)$, через $\mathbb{T}^d$ — d -мерный тор, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z})^d$.

Обозначим через $\omega_\sigma(\theta)$, $\sigma = 1, 2, \dots, s$, $s \leq N$, собственные значения эрмитовой матрицы $\Omega(\theta) = \sqrt{\hat{V}(\theta)} \geq 0$ с кратностью r_σ . Заметим, что если выполнено условие A1, то существует замкнутое подмножество $C_* \subset \mathbb{T}^d$ лебеговой меры нуль, такое, что для любой точки $\Theta \in \mathbb{T}^d \setminus C_*$ существует окрестность $\mathcal{O}(\Theta)$, такая, что каждое $\omega_\sigma(\theta)$ может быть выбрано как действительно-аналитическая функция в $\mathcal{O}(\Theta)$.

A3. Для любого $\sigma = 1, 2, \dots, s$ определитель матрицы вторых производных функции $\omega_\sigma(\theta)$ не равен тождественно нулю на множестве $\mathbb{T}^d \setminus C_*$. Кроме того, для любых $\sigma \neq \sigma'$ функции $\omega_\sigma(\theta) \pm \omega_{\sigma'}(\theta)$ не равны тождественно ненулевой константе.

Наконец предполагается, что $V(x) = V(x_-)$. Начальные данные $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$ задачи (1)–(3) принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}_{\alpha,+}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, где $\mathcal{H}_{\alpha,+}$ — гильбертово пространство с нормой $\|Y\|_{\alpha,+} = \sqrt{\sum_{x \in \mathbb{Z}_+^d} |Y(x)|^2 (1 + |x|^2)^\alpha} < \infty$. Чтобы согласовать граничное и начальные условия задачи, полагаем, что $Y_0(x) = 0$ при $x_1 = 0$.

Утверждение. Пусть выполнено условие A1 и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{H}_{\alpha,+}$ существует, и притом единственное, решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\alpha,+})$ задачи (1)–(3).

Ниже считаем, что $\alpha < -\frac{d}{2}$. Обозначим через μ_0 вероятностную борелевскую меру на $\mathcal{H}_{\alpha,+}$, которая является распределением функции Y_0 , через $\mathbb{E}$ — интеграл по мере μ_0 , а через $Q_0(x, y) = (Q_0^{ij}(x, y))$ — её корреляционную матрицу, где $Q_0^{ij}(x, y) = \mathbb{E}(Y_0^i(x) \otimes Y_0^j(y))$, $i, j = 0, 1$, $x, y \in \mathbb{Z}_+^d$. Предполагается, что $\mathbb{E}(Y_0(x)) = 0$, $\mathbb{E}(|Y_0(x)|^2) \leq C < \infty$, мера μ_0

удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания типа Ибрагимова (см. условие S4 в [7]). Наконец, мы накладываем условие A4.

A4. Зафиксируем некоторое число $k \in \{1, 2, \dots, d\}$. Матрица $Q_0(x, y)$ имеет вид $Q_0(x, y) = q_0(\bar{x}, \bar{y}, \tilde{x} - \tilde{y})$, где $x, y \in \mathbb{Z}_+^d$, $x = (\bar{x}, \tilde{x})$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\tilde{x} = (x_{k+1}, \dots, x_d)$. Кроме того, $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $\bar{y} \in \mathbb{Z}^k$, такого, что $y_1 > N(\varepsilon)$ и $(-1)^{n_j} y_j > N(\varepsilon) \forall j = 2, 3, \dots, k$, справедлива оценка $|q_0(\bar{y} + \bar{z}, \bar{y}, \tilde{z}) - q_n(z)| < \varepsilon$ для любого $z = (\bar{z}, \tilde{z}) \in \mathbb{Z}^d$ и $n \in \mathcal{N}^k$. Здесь через $q_n(z)$ ($n = (2, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{N}^k$, $n_2, \dots, n_k \in \{1, 2\}$) обозначаются корреляционные матрицы некоторых трансляционно-инвариантных мер μ_n с нулевым средним значением на пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, где $\mathcal{H}_\alpha$ — гильбертово пространство с нормой $\|Y\|_\alpha = \sqrt{\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} |Y(x)|^2 (1 + |x|^2)^\alpha} < \infty$.

Теорема. Пусть выполнены все наложенные условия на матрицу $V(x)$ и меру μ_0 . Тогда имеет место сходимость (4), т.е. для любого непрерывного ограниченного функционала $f(Y)$ на пространстве $\mathcal{H}_{\alpha,+}$ справедлива следующая сходимость:

$$\int f(Y) \mu_t(dY) \rightarrow \int f(Y) \mu_\infty(dY) \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Предельная мера μ_∞ является гауссовой мерой на $\mathcal{H}_{\alpha,+}$.

Для бесконечной одномерной цепочки гармонических осцилляторов на полупрямой с ненулевым граничным условием сходимость (4) была доказана в работе [8].

Вычислим предельную плотность потока энергии $J_\infty = (J_\infty^1, \dots, J_\infty^d)$. Для этого сначала выведем выражение для потока энергии в случае решений $u(x, t)$ с конечной энергией. Определим энергию в области $\Omega_l = \{x \in \mathbb{Z}_+^d : x_l \geq 0\}$, $l = 1, 2, \dots, d$, следующим образом:

$$E^l(t) := \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega_l} \left\{ |\dot{u}(x, t)|^2 + \sum_{y \in \mathbb{Z}_+^d} u(x, t) \cdot (V(x - y) - V(x - y_-)) u(y, t) \right\}.$$

Применяя уравнение (1) и условие A1, получаем, что $\dot{E}^l(t) = 0$, $\dot{E}^l(t) = \sum_{x'} J^l(x', t)$ при $l = 2, \dots, d$, где $x' \in \mathbb{Z}_+^d$ с координатой $x'_l = 0$. $J^l(x', t)$ обозначает плотность потока энергии в направлении $e_l = (0, \delta_{l2}, \dots, \delta_{ld})$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Пусть теперь $u(x, t)$ — случайное решение задачи (1)–(3). Тогда получаем

$$\mathbb{E}(J^l(x', t)) \rightarrow J_\infty^l = \frac{1}{2} \sum_{y'} \left\{ \sum_{m \leq -1, p \geq 0} B_{mp}^l(x', y') - \sum_{m \geq 0, p \leq -1} B_{mp}^l(x', y') \right\},$$

$$t \rightarrow \infty.$$

Здесь $B_{mp}^l(x', y') = \text{tr}[Q_\infty^{10}(x, y) \cdot (V^T(x - y) - V^T(x - y_-))]$, где $x = x' + me_l$, $y = y' + pe_l$, $x', y' \in \mathbb{Z}_+^d$ с координатами $x'_i = y'_i = 0$, $Q_\infty(x, y) = (Q_\infty^{ij}(x, y))$, $i, j = 0, 1$, — корреляционная матрица меры μ_∞ .

Мы применяем полученные результаты к частному случаю, когда меры μ_n (см. условие A4) являются гиббсовскими мерами, соответствующими различным температурам $T_n > 0$. Введём гиббсовские меры g_T как гауссовы меры в $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha < -\frac{d}{2}$, с нулевым средним и корреляционными матрицами вида (в преобразовании Фурье) $\begin{pmatrix} T\hat{V}^{-1}(\theta) & 0 \\ 0 & TI \end{pmatrix}$, где I обозначает единичную матрицу в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, T — температуру, $T > 0$. В случае когда $\mu_n = g_{T_n}$, наша модель может быть представлена как “система + 2^{k-1} резервуаров”, где резервуары состоят из частиц кристалла, которые находятся в областях D_n (см. формулу (5)), а “система” — это остальная часть кристалла. В начальный момент времени резервуары имеют гиббсовские распределения g_{T_n} с температурами T_n , $n = (2, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{N}^k$. Тогда справедлива формула (6), где

$$c_l(x_1) = \frac{2}{(2\pi)^d} \sum_{\sigma=1}^s \int_{\mathbb{T}^d} r_\sigma \sin^2(\theta_1 x_1) \left| \frac{\partial \omega_\sigma(\theta)}{\partial \theta_l} \right| d\theta, \quad (7)$$

$$l = 2, 3, \dots, k.$$

Таким образом, доказано, что существуют неравновесные состояния (или вероятностные меры μ_∞), при которых в изучаемой модели имеется ненулевой поток тепла.

Рассмотрим частный случай формулы (6). Пусть $d \geq 2$, $k = 2$ и $\mu_n = g_{T_n}$, $n = (n_1, n_2) \in \mathcal{N}^2 = \{(2, 1); (2, 2)\}$ (см. условие A4). Наша модель может быть рассмотрена как “система + два резервуара”, где резервуары состоят из частиц, лежащих в областях $D_{21} = \{x_1 \geq a, x_2 \leq -a\}$ и $D_{22} = \{x_1 \geq a, x_2 \geq a\}$. Из формулы (6) вытекает, что в этом случае плотность потока энергии равна $J_\infty(x_1) = -\frac{1}{2}(0, c_2(x_1)(T_{22} - T_{21}), 0, \dots, 0)$, где $c_2(x_1) > 0$, если $x_1 > 0$, что соответствует Второму закону термодинамики, т.е. тепло передаётся от “горячего” резервуара к “холодному”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonetto F., Lebowitz J.L., Rey-Bellet L. In: Mathematical Physics. 2000. L.: Imperial College Press, 2000. P. 128–150.
2. Lepri S., Livi R., Politi A. // Phys. Reps. 2003. V. 377. P. 1–80.
3. Spohn H., Lebowitz J.L. // Commun. Math. Phys. 1977. V. 54. № 2. P. 97–120.
4. Boldrighini C., Pellegrinotti A., Triolo L. // J. Stat. Phys. 1983. V. 30. P. 123–155.
5. Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H. // J. Math. Phys. 2003. V. 44. № 6. P. 2596–2620.
6. Dudnikova T., Komech A., Mauser N. // J. Stat. Phys. 2004. V. 114. P. 1035–1083.
7. Dudnikova T.V. // Rus. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 4. P. 460–472.
8. Dudnikova T.V. // J. Math. Phys. 2017. V. 58. № 4. P. 043301–21.

ON THE ENERGY CURRENT FOR THE HARMONIC CRYSTALS IN THE HALF-SPACE

T. V. Dudnikova

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.N. Chetverushkin March 28, 2019

Received March 28, 2019

We consider the dynamics of the harmonic crystal in the half-space with zero boundary condition. We assume that the initial data are a random function. We prove the convergence of the distributions of the solutions to a limiting measure for large times. The formula for the limiting energy current density (in mean) is derived. The application to the case of the Gibbs initial measures is given. We find the stationary non-equilibrium states, in which there exists a non-zero heat flow passing through the points of the crystal.

Keywords: harmonic crystals in the half-space, random initial data, weak convergence of measures, Gibbs measures, energy current density, non-equilibrium states.