УДК 519.218.7

БОЛЬШИЕ ВЫБРОСЫ ПРОЦЕССА БЕССЕЛЯ
И ДРУГИХ ПРОЦЕССОВ БЕССЕЛЕВСКОГО ТИПАВ. И. Питербарг^{1,2,*}, И. В. Родионов^{3,4,**}

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 03.04.2019 г.

Поступило 11.04.2019 г.

Изучается вероятность высоких выбросов траекторий модуля гауссовского векторного процесса, компоненты которого являются независимыми одинаково распределёнными гауссовскими процессами с нулевыми средними, дисперсии которых достигают максимального значения в единственной точке рассматриваемого отрезка времени. Важным примером таких процессов является процесс Бесселя.

Ключевые слова: процесс Бесселя, гауссовский процесс, большие отклонения, константа Пикандса.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524873238-241>

Пусть $\mathbf{X}(t) := (X_1(t), X_2(t), \dots, X_d(t)) \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$, $t \in [0, T]$, — гауссовский векторный процесс, компоненты которого — независимые одинаково распределённые гауссовские процессы с нулевыми средними. Модуль этого процесса $\beta(t) := |\mathbf{X}(t)|$ будем называть β -процессом. Целью настоящего сообщения является нахождение асимптотики вероятности $P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u)$ при $u \rightarrow \infty$. Важными частными случаями этого процесса является диффузионный процесс Бесселя, т.е. компоненты $X_i(t)$ являются стандартными винеровскими процессами на интервале $[0, 1]$, и бесселевский мост, определённый ниже. Данные процессы являются диффузионными и интенсивно исследуются соответствующими методами (см. [1–3]). Кроме того, эти два процесса связаны с такими важными для финансовой математики моделями, как геометрическое броуновское движение, процесс Кокса—Ингерсолла—Росса, многими другими моделями, подробное описание которых имеется в [3, гл. III.3]. Распределения максимумов процесса Бесселя и бесселевского моста выписаны в виде рядов (см. [4] — для процесса Бесселя

и [5, 6] — для броуновского моста (формула Гихмана—Кифера)). Все члены этих рядов вносят вклад в асимптотику указанной выше вероятности, что существенно затрудняет их исследование. В работе [6] весьма тонкими методами теории уравнений в частных производных показано, что для нечётных размерностей может быть получена формула типа формулы Колмогорова—Смирнова, что позволяет в этих случаях найти асимптотику хвоста распределения максимума бесселевского моста. Современное состояние данного направления описано в [7], где формула Гихмана—Кифера обобщена на случай бесселевского моста с необязательно целым параметром размерности и исследовано поведение распределения максимума при стремлении этого параметра к нулю и к бесконечности, а также в работе [8], где исследуется поведение максимума процесса Бесселя на растущем временном интервале, в основном численными методами.

В настоящей работе найдены точные асимптотики вероятностей больших отклонений максимумов процессов бесселевского типа методами, не связанными с марковским характером процессов. Предложено дальнейшее развитие метода двойных сумм асимптотического анализа вероятностей высоких выбросов траекторий гауссовских процессов и полей [9] на случайные поля, дисперсия которых достигает своего максимума на многообразиях произвольной размерности. Отметим, что в [9] рассмотрен, в частности, случай стационарного процесса $\mathbf{X}(t)$. Близким к рассматриваемым здесь примерам является стационарный процесс, для которого компонента $X_1(t)$ распределена как приращение винеровского процесса [10]. Процесс $\beta(t)$ является процессом гауссовского хаоса, он может исследо-

¹Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

²Федеральный научно-исследовательский центр
“Научно-исследовательский институт
системных исследований”
Российской Академии наук, Москва

³Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова
Российской Академии наук, Москва

⁴Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный Московской обл.

*E-mail: piter@mech.math.msu.ru

**E-mail: vecsell@gmail.com

ваться методами, аналогичными развитым в [11] для стационарных процессов гауссовского хаоса (см. также библиографию в этой работе). Частный случай основного результата настоящего сообщения получен в [12] (см. также [13]).

Доказательства представленных результатов основаны на принципе двойственности, в силу которого $\max_{t \in S} \beta(t) = \max_{t \in S, |v|=1} \langle X(t), v \rangle$. Далее к этому гауссовскому полю на цилиндре применяется существенная модификация упомянутого выше метода двойных сумм.

Приведём сначала два следствия из основного результата для процесса Бесселя и бесселевского моста.

Следствие 1. Для стандартного процесса Бесселя выполнено соотношение

$$P\left(\max_{[0,1]} \beta(t) > u\right) = \frac{\pi^{(d-1)/2}}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} u^{d-2} e^{-u^2/2} (1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$.

Процесс Бесселя $\beta(t)$, $t \in [0, 1]$, взятый при условии $\beta(1) = x$, называется бесселевским мостом [2]. Если $x = 0$, то компоненты векторного процесса $X(t)$ также обращаются в ноль при $t = 1$, превращаясь в стандартные броуновские мосты, т.е. в этом случае бесселевский мост является β -процессом, для которого $X_1(t)$, $t \in [0, 1]$ — стандартный броуновский мост. Обозначим его через $\beta_{br}(t)$.

Следствие 2. Для определённого выше бесселевского моста выполнено соотношение

$$P\left(\max_{[0,1]} \beta_{br}(t) > u\right) = \frac{2^{(d-1)/2} \sqrt{\pi}}{\Gamma(d/2)} u^{d-1} e^{-2u^2} (1 + o(1))$$

при $u \rightarrow \infty$.

Для формулировки общего результата введём необходимые обозначения, предположения и определения. Во-первых, предположим, что существует единственная точка $t_0 \in [0, T]$ такая, что

$$\max_{t \in [0, T]} \sigma^2(t) = \sigma^2(t_0) = 1,$$

где $\sigma^2(t) = DX_1(t)$ — дисперсия процесса $X_1(t)$. Обозначим через $r(s, t)$ его корреляционную функцию. Введём также следующие условия:

A1. Существует ковариационная функция $\rho(t)$ стационарного процесса такая, что

$$\lim_{s, t \rightarrow t_0} \frac{1 - r(s, t)}{1 - \rho(t - s)} = 1.$$

A2. Для функции ρ из условия A1 найдутся положительная функция $q(u)$ и функция $h(t)$, $h(t) > 0$ для всех $t \neq 0$, такие, что для всех t существует предел

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2(1 - \rho(q(u)t)) = h(t). \quad (1)$$

A3. Для всех t существует предел

$$h_1(t) = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2(1 - \sigma^2(t_0 + q(u)t)) \in [0, \infty], \quad (2)$$

причём для некоторого $\varepsilon > 0$ это соотношение выполнено равномерно в $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. В случае если $h_1(t)$ не определено, т.е. при $t_0 = 0$ и $t < 0$ или при $t_0 = T$ и $t > 0$, условимся считать, что $h_1(t) = \infty$.

Из условия A2 по определению правильно меняющейся функции и в силу свойств ковариационной функции следует, что функция $1 - \rho(t)$ правильно меняется в нуле с индексом $\alpha \in (0, 2]$, т.е. $1 - \rho(t) = |t|^\alpha \ell(t)$, где $\ell(t)$ — медленно меняющаяся в нуле функция, и $h(t) = |t|^\alpha$. Используя теоремы об обращении правильно меняющихся функций [14], получаем, что $q(u) = (1 - \rho)^{\leftarrow}(u^{-2}) = u^{-2/\alpha} \ell^\#(u^{-2})^{1/\alpha}$, $u \rightarrow \infty$, где верхний индекс “ $\leftarrow$ ” обозначает обобщённую обратную функцию, а через $\ell^\#$ обозначена сопряжённая по де Бруину функция к ℓ , также медленно меняющаяся в нуле [14]. Если функция $h_1(t)$ положительна и конечна для $t > 0$, то из A2 и A3 следует, что функция $1 - \sigma^2(t_0 + t)$, если она определена, правильно меняется в нуле, при этом показатель изменения также равен α , но теперь $h_1(t) = h_1(1)t^\alpha$. Аналогично для $t < 0$ с константой $h_1(-1)$. Заметим, что условие равенства максимума дисперсии единице и равенства единице коэффициента при $h(t)$ в условии A2 несущественны; к произвольным (положительным) значениям этих параметров можно перейти масштабированием времени и пространства.

Обозначим $L(u) := \int_{|t-t_0| \leq \varepsilon} e^{-u^2(1-\sigma^2(t))/2} dt$. Заметим, что асимптотика этого интеграла при $u \rightarrow \infty$ не зависит от значения $\varepsilon > 0$. Обозначим также

$$H_\alpha := \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \Lambda^{-1} E \exp\left(\max_{t \in [0, \Lambda]} \chi(t)\right),$$

$$P_\alpha = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} E \exp\left(\max_{t \in [-\Lambda, \Lambda]} \chi(t) - h_1(t)\right),$$

где $\alpha \in (0, 2]$, $\chi(t) = \sqrt{2} B_{\alpha/2}(t) - |t|^\alpha$, $B_{\alpha/2}$ — стандартное дробное броуновское движение с показателем Хёрста $\frac{\alpha}{2}$ и $h_1(t) \in (0, \infty]$ для всех $t \neq 0$. Поскольку $h_1(t)$ — степенная функция, то $0 < H_\alpha, P_\alpha < \infty$ [9]. Предположим ещё, что корреляционная функция

процесса X_1 обращается в единицу только в совпадающих точках.

Теорема. Пусть выполнены вышеприведённые условия на процесс X . Тогда при $u \rightarrow \infty$ выполнены следующие соотношения. Если хотя бы одно из чисел $h_1(1)$, $h_1(-1)$ равно нулю, то

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{H_\alpha}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} u^{d-2} \times \\ \times L(u) q(u)^{-1} e^{-u^2/2} (1 + o(1)). \quad (3)$$

Если $h_1(1) = h_1(-1) = \infty$ (здесь и ниже имеется в виду доопределение h_1 в АЗ для граничной t_0), то

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{(d-1)/2}}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} u^{d-2} e^{-u^2/2} (1 + o(1)). \quad (4)$$

Если хотя бы одно число из чисел $h_1(1)$, $h_1(-1)$ положительно и конечно, при этом другое — не нуль, то

$$P(\max_{[0,T]} \beta(t) > u) = \frac{\pi^{(d-1)/2} P_\alpha}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} u^{d-2} e^{-u^2/2} (1 + o(1)). \quad (5)$$

Заметим, что для процесса Бесселя $t_0 = 1$, $L(u) \sim 2u^{-2}$, $u \rightarrow \infty$, $q(u) = u^{-2}$, $h_1(1) = \infty$, $h_1(-1) = 1$ и $\alpha = 1$, поэтому $P_\alpha = 1$ [9]. Далее для бесселевского моста $t_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma^2(t_0) = \frac{1}{4}$, $\alpha = 1$, $h_1(1) = h_1(-1) = 0$, а после приведения максимума дисперсии к 1 имеем, что $q(2u) = 2^{-3}u^{-2}$, $L(2u) \sim u^{-1} \sqrt{\pi/32}$, $u \rightarrow \infty$, и $H_\alpha = 1$.

Рассмотрим ещё один пример. Пусть $X_1(t) = B_H^d(t)$, $t \in [0, 1]$, — дробное броуновское движение с параметром Хёрста H , $H \in (0, 1)$. По аналогии с предыдущим примером назовём процесс $\beta(t)$ дробным процессом Бесселя, обозначим его через $\beta_H(t)$. Для этого процесса $t_0 = 1$, $\alpha = 2H$, $h_1(-1) = h_1(1) = \infty$ при $H > \frac{1}{2}$, а при $H < \frac{1}{2}$ имеем $h_1(-1) = 0$, $q(u) = u^{-1/H}$ и $L(u) \sim (2^{2+1/(2H)} u^2 H)^{-1}$, $u \rightarrow \infty$. При $H = \frac{1}{2}$ мы имеем стандартный процесс Бесселя.

Следствие 3. Для дробного процесса Бесселя с показателем Хёрста H при $u \rightarrow \infty$ выполнены соотношения

$$P(\max_{[0,1]} \beta_H(t) > u) = \begin{cases} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{2^{d/2-1} \Gamma(d/2)} u^{d-2} e^{-u^2/2} (1 + o(1)), & H > \frac{1}{2}, \\ \frac{H_{2H}}{H 2^{(d+1/H)/2} \Gamma(d/2)} u^{1/H+d-4} e^{-u^2/2} (1 + o(1)), & H < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность академику РАН А.Н. Ширяеву, обратившему наше внимание на важность задачи о вероятностях больших отклонений траекторий процесса Бесселя.

Источник финансирования. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 19–01–00090.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Göing-Jaeschke A., Yor M. // Bernoulli. 2003. V. 9. № 2. P. 313–349.
2. Revuz D., Yor M. Continuous Martingales and Brownian Motion. 2nd ed. B.: Springer Verlag, 1994. 636 p.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты, Модели. М.: ФАЗИС, 1998. 512 с.
4. Estrella A. // Economet. Theor. 2003. V. 19. № 6. P. 1128–1143.
5. Kiefer J. // Ann. Math. Statist. 1959. V. 30. P. 420–447.
6. Гухман И.И. // Теор. вер. примен. 1957. Т. 2. № 3. С. 380–384.
7. Pitman J., Yor M. // Electronic J. Probability. 1999. V. 4. № 15. 35 p.
8. De Long D.M. // Comm. Stat. Theor. Meth. A. 1981. V. 10. № 21. P. 2197–2213.
9. Piterbarg V.I. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Providence: AMS, 1996. 220 p.
10. Shepp L.A. // Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. № 3. P. 946–951.
11. Жданов А.И., Питербарг В.И. // Теор. вер. примен. 2018. Т. 63. № 1. С. 3–28.
12. Hashorva E., Ji L. // Extremes. 2015. V. 18. № 1. P. 37–64.
13. Liu P., Ji L. // Stoch. Proc. Appl. 2017. V. 127. № 2. P. 497–525.
14. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. 510 p.

HIGH EXCURSIONS OF BESSEL PROCESS AND OTHER PROCESSES OF BESSEL TYPE

V. I. Piterbarg^{1,2}, I. V. Rodionov^{3,4}

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Scientific Research Institute for System Analysis, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

³*Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

⁴*Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudnyi,
Moscow oblast, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev April 3, 2019

Received April 11, 2019

A high excursion probability for the modulus of a Gaussian vector process with independent identically distributed components is evaluated. It is assumed that the components have means zero and variances reaching its absolute maximum at a single point of the considered time interval. An important example of such processes is the Bessel process.

Keywords: Bessel process, Gaussian process, high excursions, Pickands constant.