ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 487*, *№ 3*, *с. 242–245*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.53

МНОГОМЕРНАЯ ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО АРГУМЕНТА

Ю. Н. Дрожжинов

Представлено академиком РАН Д.В. Трещевым 12.04.2019 г.

Поступило 18.04.2019 г.

Для обобщённых функций, преобразование Лапласа которых имеют неотрицательную мнимую часть в трубчатой области над положительным координатным углом, приведены достаточные условия существования квазиасимптотики, найдена та правильно меняющаяся функция, относительно которой существует эта квазиасимптотика. Полученные результаты применяются для изучения асимптотического поведения решений задачи Коши для пассивных операторов.

Ключевые слова: обобщённые функции, квазиасимптотика, абелевы и тауберовы теоремы, правильно меняющиеся функции, голоморфные функции ограниченного аргумента.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524873242-245

Во многих тауберовых теоремах асимптотические свойства функций исследовались относительно уже заранее заданной функции (обычно из шкалы правильно меняющихся функций). В сообщении обсуждается альтернативная задача.

Пусть дана обобщённая функция, обладает ли она асимптотикой относительно какой-либо правильно меняющейся функции?

В работе рассмотрена новая многомерная тауберова теорема для обобщённых функций, преобразование Лапласа которых имеют ограниченный аргумент в трубчатой области над положительным координатным углом, найдены необходимые и достаточные условия существования квазиасимптотики таких обобщённых функций. При этом указана та правильно меняющаяся функция, относительно которой и существует квазиасимптотика. Эта теорема, по существу, является элементом многомерного операционного исчисления. Она применена для отыскания квазиасимптотики обобщённой задачи Коши для уравнений в свёртках, ядра которых — пассивные операторы.

Напомним некоторые сведения из теории обобщённых функций, которые часто используются в модельных задачах математической физики.

Пусть Γ — выпуклый замкнутый телесный острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат, $\Gamma^* = [y\colon (y, \xi) > 0,\ \xi \in \Gamma]$, $C = \Gamma^*$ — сопряжённый конус. $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ — трубчатая область над конусом C. Через $S'_\Gamma = \{g(\xi) \in S'\colon \operatorname{supp} g \subset \Gamma\}$ обозначаем пространство обобщённых функций медленного роста с носителями в Γ. Преобразование Лапласа обобщённых функций $f(\xi) \in S'_\Gamma$, определяемое формулой

$$L[f(\xi)] \equiv \tilde{f}(z) = (f(\xi),\ e^{i(z,\xi)}),\\ z = x + iy,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in C,$$

осуществляет изоморфизм свёрточной алгебры S'_Γ на алгебру $H(T^C)$ функций, голоморфных в трубчатой области $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ с полиномиальной оценкой роста вблизи границы. Всякая функция $f(z)$ из $H(T^C)$ имеет граничное значение в пространстве обобщённых функций

$$\tilde{f}(x + iy) \to \tilde{f}(x), \quad y \to 0,\ y \in C \text{ в } S',$$

причём $\tilde{f}(x)$ есть преобразование Фурье своей спектральной функции $f(\xi)$ из S'_Γ (см. [1]).

Пусть $U = \{U_k,\ k > 0\}$ — мультипликативная однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{S}'$ — пространство обобщённых функций медленного роста, а $\rho(k)$ — положительная непрерывная функция при $k > 0$.

Определение 1. Говорят, что $f \in \mathcal{S}'$ обладает квазиасимптотикой в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$ по группе $U = \{U_k,\ k > 0\}$, если для любой основной функции $\psi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и некоторой обобщённой функции $g \in \mathcal{S}'$, $g(\xi) \not\equiv 0$,

$$\frac{1}{\rho(k)}(f(U_{1/k}\xi),\ \psi(\xi)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(\xi),\ \psi(\xi))$$

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва
E-mail: *drozzin@mi-ras.ru*

$$\left(\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k\xi),\ \psi(\xi)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(\xi),\ \psi(\xi))\right). \quad (1)$$

В этом случае говорят, что f асимптотически однородна на $\mathcal{S}$ по группе $U = \{U_k,\ k > 0\}$ в нуле (на бесконечности).

Если для $f \in \mathcal{S}'$ выполнено соотношение (1) и $g \not\equiv 0$, то функция $\rho(k)$ обязательно является правильно меняющейся функцией. Положительная непрерывная функция $\rho(k)$, $k > 0$, называется правильно меняющейся (автомодельной), если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a^{\alpha}$$

равномерно на компактах по a.

Отметим, что если $f(\xi)$ — асимптотически однородна на бесконечности относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$, то её преобразование Фурье $\tilde{f}(x)$ — асимптотически однородно в нуле относительно автомодельной функции $k^n\rho(k)$.

Определение 2. Говорят, что голоморфная в области $G \subset T^C$ функция $h(z)$ имеет там ограниченный аргумент, если $h(z) \neq 0$ при $z \in G$ и существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\arg h(z)| \le M, \quad z \in G.$$

При этом предполагается, что $\arg h(z)$ меняется непрерывным образом, когда z пробегает область G.

В частности, голоморфные функции с неотрицательной мнимой (или вещественной) частью в G имеют там ограниченный аргумент. Класс голоморфных функции с неотрицательной мнимой (или вещественной) частью в T^C обозначаем через $H_+(T^C)$.

Далее в качестве группы автоморфизмов мы ограничимся группой растяжений конуса $\{U_k = kI,\ k > 0\}$, где I — единичная матрица.

Для голоморфных функций из $H_+(T^C)$ справедлива следующая тауберова

Теорема 1. *Пусть $f(\xi) \in S'_\Gamma$ (т.е. $\operatorname{supp} f(\xi) \subset \Gamma$) и $\tilde{f}(z)$ имеет ограниченный аргумент в некоторой окрестности начала координат в T. Для того чтобы $f(\xi)$ обладала квазиасимптотикой $g(\xi)$ в конусе Γ по группе $\{U_k = kI,\ k > 0\}$ относительно функции $\rho(k)$, необходимо и достаточно выполнения условия: существует открытое множество $\Omega \subset C$ такое, что*

$$\frac{1}{k^n\rho(k)}\tilde{f}\left(\frac{iy}{k}\right) \to h(iy), \quad k \to \infty,\ k \in I,\ y \in \Omega.$$

При этом $\tilde{g}(z) = h(z)$, $z \in T^{\mathbb{R}^n_+}$.

Подробнее см. [2].

Определение 3. Говорят, что голоморфная функция $\tilde{f}(z) \in H_+(T^C)$ ведёт себя в нуле в T^C как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$, где $\rho(k)$ — правильно меняющаяся функция, если в окрестности нуля в T^C существует

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\rho(k)}\tilde{f}\left(\frac{z}{k}\right) \quad \text{для } z \in T^C,\ |z| < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *$\tilde{f}(z) \in H(T^C)$ ведёт себя в T^C как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ тогда и только тогда, когда её граничное значение $\tilde{f}(x)$ асимптотически однородно в нуле относительно $\rho(k)$.*

Это утверждение есть непосредственное следствие общей тауберовой теоремы (см. [2]).

Во многих тауберовых теоремах асимптотические свойства функций исследовались относительно уже заранее заданной функции $\rho(k)$ (обычно из шкалы правильно меняющихся функций). Представляет интерес следующая задача.

Для обобщённых функций $f(t) \in C'_\Gamma$, таких что $\tilde{f}(z) \in H_+(T^C)$, имеет место следующая тауберова

Теорема 2. *Пусть $f(t) \in S'_\Gamma$ и её преобразование Лапласа $\tilde{f}(z) \in H_+(T^\zeta)$. Для того чтобы обобщённая функция $f(t)$ обладала квазиасимптотикой на бесконечности по лучам, необходимо и достаточно, чтобы нашлась область $\Omega \Subset C$ такая, чтобы существовал*

$$\lim_{k\to\infty}\arg\tilde{f}\left(\frac{iy}{k}\right) = w(iy), \quad y \in \Omega, \qquad (2)$$

т.е. у аргумента преобразования Лапласа существует угловой предел в начале координат в конусе $C' = \{ky\colon y \in \Omega,\ k > 0\}$. При этом в условии достаточности в качестве автомодельной (правильно меняющейся) функции, относительно которой существует эта квазиасимптотика, можно взять функцию

$$\rho(k) = \frac{1}{k^n}\left|\tilde{f}\left(i\frac{e}{k}\right)\right|,$$

где $e \in \operatorname{pr} C'$.

Следствие 1. *В условиях теоремы при любом выборе $e_0 \in \operatorname{pr} C$ функция $\left|\tilde{f}\left(\frac{ie_0}{k}\right)\right|$ будет автомодельной (правильно меняющейся) функцией. При разном выборе e_0 из $\operatorname{pr} C$ при $k \to \infty$ они будут эквивалентными правильно меняющимися функциями.*

Замечание 1. Если в условиях теоремы обобщённая функция $f(t)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности по лучам относительно правильно меняющейся функции $\rho(k)$, то обязательно $\rho(k)$ эквивалентна правильно меняющейся функции $\frac{1}{k^n}\left|\tilde{f}\left(i\frac{e}{k}\right)\right|$, где $e \in \operatorname{pr} C$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^n}\left|\tilde{f}\left(i\frac{e}{k}\right)\right|}{\rho(k)} = \text{const}.$$

Следствие 2. *Теорема останется справедливой, если в условиях теоремы* (*и замечания к ней*) *вместо условия* $\tilde{f}(z) \in H_+(T^C)$ *потребовать ограниченность аргумента у* $f(z)$, *т.е. условие*: *существует число* $m \geq 1$ *такое*, *что*

$$0 \leq \arg\tilde{f}(z) \leq \pi m, \quad z \in T^C. \tag{3}$$

Следующий пример показывает, как может применяться теорема 2.

Рассмотрим в $T^{\mathbb{R}^2_+}$ функцию

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = -i\frac{1}{2}(\ln z_1 + \ln z_2) =$$
$$= -i\frac{1}{2}(\ln r_1 + \ln r_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

где $z_j = r_j e^{i\varphi_j}, j = 1, 2.$ Нетрудно видеть, что $\arg\tilde{f}\left(\frac{z}{k}\right)$ не зависит от k и согласно теореме 2 соответствующая обобщённая функция $f(t) \in S'_{\mathbb{R}^2_+}$ должна обладать квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k) = k^{-2}\ln k$.

Одно из применений теоремы 2 — отыскание той правильно меняющейся функции, относительно которой решение задачи Коши для свёрточного уравнения с пассивным относительно конуса Γ ядром обладает квазиасимптотикой.

Комплекснозначная функция $\tilde{Z}(z)$ называется положительно вещественной в трубчатой области T^C, $C = \Gamma^*$, если она голоморфна в T^C и её вещественная часть неотрицательна при $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n, y \in C.$ При этом $\tilde{Z}(iy)$ вещественна для $y \in C$.

Свёрточный оператор

$$Z(t)*, \quad t \in \mathbb{R}^n, \quad Z(t) \in S'_\Gamma$$

называется пассивным относительно конуса Γ, если преобразование Лапласа его ядра $\tilde{Z}(z)$ положительно-вещественно в трубчатой области T^C.

Многомерные пассивные операторы и системы часто встречаются в математической физике. Например, гиперболические относительно конуса операторы, уравнения переноса, уравнения сложных электрических цепей без подкачки энергии, уравнения Максвелла, Дирака и др. (подробнее см. [2]).

Гладкая $(n-1)$-мерная поверхность без края S называется C-подобной, если для любой точки $t \in S$ конус $\Gamma + t$ пересекает S в единственной точке t. Через S^+ обозначим ту открытую часть пространства $\mathbb{R}^n$, которая содержит конусы $\Gamma + t$, $t \in S$.

Рассмотрим уравнение

$$Z(t) * u(t) = g(t), \quad \text{где } g(t) \in S', \ \operatorname{supp} g \subset \bar{S}^+. \tag{4}$$

Обобщённой задачей Коши для пассивного относительно конуса Γ оператора $Z(t)*$ называется задача о нахождении решения $u(t) \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 2. *Если* $Z(t)*$ *невырожден* (*т.е.* $\tilde{Z}(z) \neq 0$), *то решение задачи Коши существует*, *единственно в классе* $S'_{\bar{S}^+}$ (*т.е.* $\operatorname{supp} u \subset \bar{S}^+$) *и выражается формулой*

$$u = A * g,$$

где $A(t)$ — *невырожденный пассивный оператор относительно конуса* Γ (*фундаментальное решение*), *определяемый формулой* $Z(t) * A(t) = \delta(t)$.

Подробнее см. [2].

Представляет интерес задача о нахождении хотя бы достаточных условий о существовании квазиасимптотики у фундаментального решения задачи Коши. Какова же та правильно меняющаяся функция, относительно которой существует квазиасимптотика?

Теорема 3. *Пусть* $Z(t)*$ — *пассивный относительно конуса* C *оператор и* $g(t) \in S'_{\bar{S}^+}$ *обладает квазиасимптотикой по лучам относительно правильно меняющейся функции* $\rho_1(k)$. *Пусть также существует конус* $C' \subset C$ *такой*, *что для преобразования Лапласа* $\tilde{Z}(z)$ *выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty}\arg\tilde{Z}\left(\frac{iy}{k}\right) = w(iy), \quad y \in \operatorname{pr} C'.$$

Тогда обобщённое решение задачи Коши $u(t)$ *уравнения* (4) *обладает квазиасимптотикой на бесконечности по лучам относительно правильно меняющейся функции*

$$\rho(k) = \frac{1}{k^n}\left|\tilde{Z}\left(i\frac{e_0}{k}\right)\right|^{-1}\rho_1(k).$$

Здесь e_0 — *произвольный вектор из* $\operatorname{pr} C$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
2. *Владимиров В.С.*, *Дрожжинов Ю.Н.*, *Завьялов Б.И.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.

MANY-DIMENSIONAL TAUBERIAN THEOREMS FOR HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF BOUNDED ARGUMENT

Ju. N. Drozhzhinov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS D.V. Treshchev April 12, 2019

Received April 18, 2019

For generalized functions with Laplace transform has nonnegative imaginary part in tube domain over positive actant, we found sufficient conditions for existence of quasiasymptotic, the function with regular behavior with respect to which the quasiasymptotic exists being explicitly found. The obtained results are used to steady of the asymptotic behaviour of solutions of the Cauchy problem of passive operators.

Keywords: generalized functions, quasiasymptotics, regulary varying, tauberian theorem, holomorphic functions.