

УДК 536.71-77

ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕТОДА  $n$ -ОКРЕСТНОСТИ

Член-корреспондент РАН Б. В. Крыжановский

Поступило 13.12.2018 г.

Установлен параметр малости, определяющий возможность применения метода  $n$ -окрестности для вычисления свободной энергии спиновой системы. Определены типы спиновых систем, для которых справедливо приближение метода  $n$ -окрестности. Показано, что метод хорошо работает при исследовании свойств спиновых систем, в которых эффективное число ближайших соседей больше  $\frac{16}{3}$ .

*Ключевые слова:* распределение энергий, свободная энергия, статсумма, модель Изинга, метод  $n$ -окрестности.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524873246-251>

Статфизические подходы широко используются для описания нейронных сетей большого размера [1–4]. В частности, наиболее продвинутые нейросетевые алгоритмы глубокого обучения и обработки изображений [5, 6] основаны на оптимизации свободной энергии системы спинов-нейронов, т.е. на оптимизации распределения энергий. К настоящему времени имеется ряд моделей, для свободной энергии которых получены точные решения [7]. Эти решения получены без знания вида распределения энергий, опираясь только на самые общие соображения, алгебру матриц и комбинаторные методы. Однако распределение энергий для этих моделей до сих пор неизвестно. Более того, к настоящему времени вид распределения энергий известен только для одномерной модели Изинга. Это обстоятельство инициировало ряд работ, авторы которых пытаются получить выражения для распределения энергий в рамках различных приближений и численными методами [8–13].

В настоящей работе мы исследуем возможность использования приближения метода  $n$ -окрестности [8] для расчёта распределения энергий в различных спиновых системах. Распределение энергий является основополагающей характеристикой, определяющей свойства системы. Знание распределения энергий позволяет легко вычислить статсумму и все вытекающие из этого свойства системы. Действительно, рассмотрим систему из  $N$  спинов  $s_i = \{\pm 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , энергия которой в конфигурационном состоянии  $S = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  задаётся выражением

$$E(S) = -\frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N J_{ij} s_i s_j. \quad (1)$$

Статистическая сумма такой системы представима в виде  $Z = \sum_E D(E) \exp(-N\beta E)$ , где  $\beta$  — обратная температура, суммирование ведётся по всем значениям энергии  $E$ , а  $D(E)$  — вырождение уровней энергии, т.е. распределение энергий.

В общем случае распределение энергий  $D(E)$  неизвестно. Казалось бы, его можно определить, используя результаты центральной предельной теоремы. Действительно, величина  $E$  есть сумма  $N$  случайных величин и центральная часть распределения  $D(E)$  прекрасно описывается гауссианом

$$D(E) = 2^N \sqrt{\frac{N}{2\pi\sigma_0}} \exp\left(-\frac{1}{2} N \frac{E^2}{\sigma_0^2}\right),$$

где

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i,j=1}^N J_{ij}^2. \quad (2)$$

Однако проблема в том, что основной вклад в формирование фазового перехода вносят состояния, энергии которых находятся на хвостах распределения  $D(E)$ , где выражение (2) неприменимо. Обойти эти трудности можно, используя метод  $n$ -окрестности.

Метод  $n$ -окрестности детально описан в [8], где используется эвристически, без обоснования осуществляемых приближений. Суть метода заключается в разбиении всего пространства из  $2^N$  конфигураций на  $N+1$  подпространств, каждое из которых определяется своим распределением энергий  $D_n(E)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Формализ этого подхода состоит в сле-

Научно-исследовательский институт системных исследований  
Российской Академии наук, Москва  
E-mail: kryzhanov@niisi.ras.ru

дующем. Для разбиения пространства выберем в качестве начала отсчёта некоторую конфигурацию  $S_0 = (s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \dots, s_N^{(0)})$ . Для определённости рассуждений примем, что  $S_0$  есть основное состояние, соответствующее глобальному минимуму энергии  $E_0$ . Назовём  $n$ -окрестностью множество  $\Omega_n$ , состоящее из конфигураций  $S_n$ , отличающихся от  $S_0$  противоположными знаками  $n$  спинов. Все конфигурации множества  $\Omega_n$  имеют одинаковую относительную намагниченность  $m = N^{-1}(S_n, S_0)$ . Тогда  $Z$  можно представить в виде

$$Z = \sum_{n=0}^N \sum_E D_n(E) \exp(-N\beta E), \quad (3)$$

где  $D_n(E)$  — распределение энергий в множестве  $\Omega_n$ .

Вид распределения  $D_n(E)$  в общем случае неизвестен. Однако, следуя [8], можно получить точные выражения для среднего ( $E_n$ ) и дисперсии (обозначим её как  $N^{-1}\sigma_n^2$ ) этого распределения. Эти выражения в пределе  $N \rightarrow \infty$  принимают достаточно простой вид

$$E_n = E_0 m^2, \quad \sigma_n^2 = \sigma_0^2 \cdot (1 - m^2)(1 - a\sigma_{h0}^2), \quad (4)$$

где  $a = 1 - 2\sigma_{h0}^2\sigma_0^{-2}$ ,  $\sigma_{h0}^2$  — дисперсия локальных полей в основном состоянии.

Таким образом, мы разделили пространство конфигураций на  $N + 1$  подпространств ( $n$ -окрестностей). Смысл такого разбиения состоит в следующем. Энергия  $E$  в  $n$ -окрестности ведёт себя как случайная величина, и центральная часть распределения  $D_n(E)$  в соответствии с центральной предельной теоремой может быть описана как гауссиан со средним  $E_n$  и дисперсией  $N^{-1}\sigma_n^2$ :

$$D_n(E) = \binom{N}{n} \sqrt{\frac{N}{2\pi\sigma_n}} \exp\left[-\frac{1}{2}N\left(\frac{E - E_n}{\sigma_n}\right)^2\right]. \quad (5)$$

Очевидно, что сумма таких гауссианов  $D(E) = \sum_n D_n(E)$  не совпадает с гауссианом (2). Соответственно, хвосты распределения  $D(E)$  будут намного более корректно описываться суммой  $D(E) = \sum_n D_n(E)$ , чем выражением (2). В следующем разделе мы исследуем, в каких случаях и для каких моделей применимо гауссово приближение (5).

### 1. ПАРАМЕТР МАЛОСТИ В МЕТОДЕ $n$ -ОКРЕСТНОСТИ

Проанализируем, в чём заключается приближение метода  $n$ -окрестности. Исходные условия та-

ковы: мы не знаем истинного вида распределения энергий  $D_n(E)$ , известны только первые моменты этого распределения, в частности среднее и дисперсия (4). Ниже мы определим параметр малости, по которому можно производить разложение функции  $D_n(E)$ , в том числе и вблизи критической точки.

Представим  $D_n(E)$  в виде

$$D_n(E) = c \binom{N}{n} \exp[-N\varphi(\mu, E)], \quad \mu = m^2, \quad (6)$$

где  $c$  — несущественная нормировочная константа, а  $\varphi(\mu, E)$  — неизвестная функция, для которой известны только первые моменты. Тогда, используя формулу Стирлинга и переходя в (4) от суммирования к интегрированию, для статсуммы с точностью до несущественной константы получим

$$Z \sim \int_0^1 dm \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-Nf(m, E)}, \quad (7)$$

где

$$f(m, E) = \varphi(\mu, E) + \beta E + \frac{1+m}{2} \ln\left(\frac{1+m}{2}\right) + \frac{1-m}{2} \ln\left(\frac{1-m}{2}\right). \quad (8)$$

Оценим интеграл (7) методом перевала, тогда условия седловой точки примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial m} &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+m}{1-m}\right) + 2m \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial E} &= \frac{\partial \varphi}{\partial E} + \beta = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Решения этих уравнений  $m = m_0$  и  $E = U$  представляют собой спонтанную намагниченность и внутреннюю энергию. Соответственно выражением (8) задаётся величина свободной энергии  $f = f(m_0, U)$ .

Перейдём к определению малого параметра в методе  $n$ -окрестности. Для простоты дальнейших рассуждений будем рассматривать только однородные системы, обладающие фазовым переходом второго рода. В этом случае из (4) следует  $\alpha = 0$  и  $\sigma_n = \sigma_0 \cdot (1 - m^2)$ . Для прочих моделей рассуждения аналогичны.

Представим функцию  $\varphi(\mu, E)$  в виде ряда в окрестности точки  $E = E_n$ :

$$\varphi = \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\chi_3\varepsilon^3 + \frac{1}{4!}\chi_4\varepsilon^4 + \dots, \quad \varepsilon = \frac{E - E_n}{\sigma_n}, \quad (10)$$

где  $\chi_k$  есть куммулянты распределения  $D_n(E)$ . Основная идея метода  $n$ -окрестности состоит в том, чтобы

ограничиться учётом только нескольких первых членов разложения. Однако разложение (10) имеет смысл только в случае  $|\epsilon| < 1$ , и только в этом случае метод  $n$ -окрестностей может давать хорошее приближение.

Уточним приближение: нас не интересуют значения величины  $\epsilon = \epsilon(m, E)$  на всём пространстве значений параметров  $m$  и  $E$ . Разложение (10) представляет интерес только в малой окрестности седловой точки, т.е. в окрестности значений  $m = m_0$  и  $E = U$ . Соответственно искомым малым параметром разложения (10), определяющим применимость метода  $n$ -окрестности, является параметр  $\epsilon_0$ :

$$\epsilon_0 = \frac{U - E_0 m_0^2}{\sigma_0 (1 - m_0^2)}. \tag{11}$$

В следующем разделе мы исследуем величину этого параметра для различных моделей на основании известных моделей и результатов численного эксперимента. Здесь же мы ограничимся оценкой величины  $\epsilon_0$  методом от обратного. Допустим, что для рассматриваемой модели параметр  $\epsilon_0$  мал и можно ограничиться только первым членом разложения (10). В этом случае уравнения (9) с учётом (10) преобразуются к виду

$$\epsilon \left( \epsilon - \frac{E_0}{\sigma_0} \right) = -\frac{1 - m^2}{4m} \ln \left( \frac{1 + m}{1 - m} \right), \tag{12}$$

$$\epsilon = -\beta \sigma_0 (1 - m^2). \tag{13}$$

Исключая из этих уравнений  $\epsilon$ , получим уравнение состояния

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + m}{1 - m} \right) = -2m\beta\sigma_0 \left[ \frac{E_0}{\sigma_0} + \beta\sigma_0(1 - m^2) \right], \tag{14}$$

решение которого при  $m \rightarrow 0$  даёт значение критической температуры  $\beta_c$ .

Нас интересует поведение величины  $\epsilon = \epsilon_0$ , являющейся решением (12), (13). Анализ уравнения (12) показывает, что с ростом  $\beta$  величина  $|\epsilon_0|$  возрастает, достигая максимума в критической точке  $\beta = \beta_c$ . В пределе  $m \rightarrow 0$  ( $\beta \rightarrow \beta_c$ ) уравнение (12) преобразуется к виду

$$\epsilon^2 - \epsilon \frac{E_0}{\sigma_0} + \frac{1}{2} = 0. \tag{15}$$

Решение этого уравнения

$$\epsilon_c = \frac{E_0}{2\sigma_0} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_0^2}{\sigma_0^2} - 2} \tag{16}$$

даёт нам максимальное значение величины  $|\epsilon_0|$ :  $\max |\epsilon_0| = |\epsilon_c|$ . Соответственно метод  $n$ -окрестности сводится к разложению (10) по малому параметру  $|\epsilon| \leq |\epsilon_c|$ .

Как следует из (16), метод  $n$ -окрестности может применяться только для систем, для которых выполняется условие  $E_0^2 \geq 2\sigma_0^2$ . Анализ совместного решения уравнений (12), (13) накладывает на использование метода  $n$ -окрестности ещё более сильное ограничение:

$$E_0^2 \geq \frac{8}{3} \sigma_0^2 \quad \text{или} \quad |\epsilon_c| \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408. \tag{17}$$

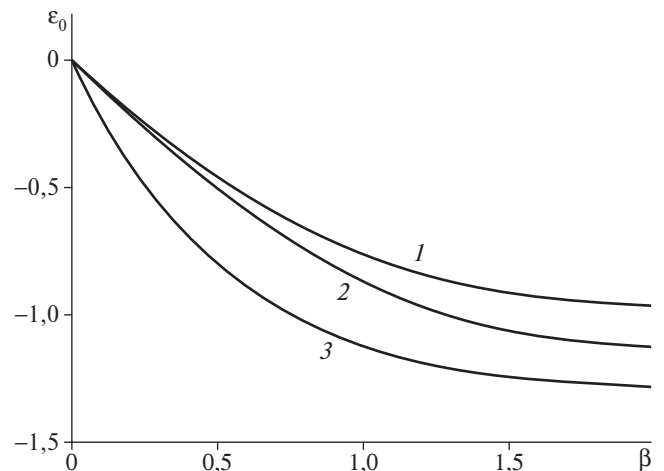
Это ограничение обусловлено тем, что при  $3E_0^2 < 8\sigma_0^2$  уравнения (12), (13) предсказывают скачок спонтанной намагниченности в критической точке, что противоречит известным результатам.

## 2. ВЕЛИЧИНА ПАРАМЕТРА МАЛОСТИ

Выражение (16) даёт оценку значения параметра малости. Здесь мы установим точные значения параметра  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$ , вытекающие из известных выражений или данных численного моделирования.

Сначала рассмотрим зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  для точно решаемых моделей.

2.1. Одномерная модель Изинга. Спонтанная намагниченность в этой модели отсутствует  $m_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$ , а внутренняя энергия определяется как  $U = -th\beta$ . Из (11) получаем  $\epsilon_0 = -th\beta$ , т.е. величина  $|\epsilon_0|$  с ростом  $\beta$  монотонно возрастает до единицы (рис. 1). Соответственно приближение метода  $n$ -окрестности справедливо только при малых значениях  $\beta$ .



**Рис. 1.** Зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  для моделей без фазового перехода: 1 — одномерная модель Изинга, 2 — модель EA, 3 — модель EA\*.

2.2. Двумерная модель Изинга. Для 2D-модели Изинга известны точные выражения для внутренней энергии и спонтанной намагниченности [7]:

$$U = -2 \operatorname{th} 2\beta - \frac{\operatorname{sh}^2 2\beta - 1}{\operatorname{sh} 2\beta \cdot \operatorname{ch} 2\beta} \left[ \frac{2}{\pi} E_1(k) - 1 \right], \quad (18)$$

$$m_0 = \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{sh}^4 2\beta} \right)^{1/8}, \quad (19)$$

где  $E_1(k)$  — эллиптический интеграл первого рода и введены обозначения

$$k = \frac{2 \operatorname{sh} 2\beta}{\operatorname{ch}^2 2\beta}, \quad E_1(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - \kappa^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi.$$

Подставляя эти выражения в (11), определяем зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$ . График этой зависимости приведён на рис. 2. Как видим, в критической точке  $|\epsilon_0| = 1$ . Это означает, что метод  $n$ -окрестности к данной модели неприменим.

2.3. Модель на решётке Бете. Для этой модели с  $q$  ближайшими соседями имеем

$$f(\beta) = -\frac{1}{2} q\beta + \frac{1}{2} \ln \frac{[1 + z^2 - z(x + x^{-1})][x + x^{-1} - 2z]^{q-2}}{(1 - z^2)^q}, \quad (20)$$

$$U = \frac{df}{d\beta},$$

где  $z = e^{-2\beta}$ , параметр  $x$  равен наименьшему положительному решению уравнения  $z = x(1 - x^{q-2}) \times (1 - x^q)^{-1}$ , а спонтанная намагниченность равна

$m_0 = (1 - x^q)(1 + x^q)^{-1}$ . Зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  получим подстановкой  $m_0$  и  $U$  в (11). Графики этой зависимости приведены на рис. 2. Как видим, уже для  $q = 3$  параметр  $|\epsilon_0|$  мал при любых температурах. С ростом  $q$  величина этого параметра убывает как  $|\epsilon_0| \approx (2q)^{-1/2}$ .

Теперь рассмотрим зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  для моделей, не имеющих точного решения.

2.4. Экспериментальные результаты. Модели, не имеющие точного решения, мы исследовали методом Монте-Карло. Статистика набиралась по  $10^9$  переворотов спина для каждого значения  $\beta$ . Рассматривались два типа моделей. Первый тип — модели Изинга на гиперкубе: 3D-модель  $N = 30 \times 30 \times 30$ , 4D-модель  $N = 13 \times 13 \times 13 \times 13$  и 5D-модель  $N = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$ . Результаты представлены на рис. 2. Как видим, для данного типа моделей параметр  $|\epsilon_0|$  достаточно мал, что означает применимость метода  $n$ -окрестности для анализа этих моделей. Второй тип — планарные решётки со случайными связями, взаимодействие только с 4 ближайшими соседями: EA-модель с нормальным распределением связей  $J_{ij}$  и EA\*-модель с равномерным распределением связей  $J_{ij}$  одного размера  $N = 160 \times 160$ . В эксперименте измерялась внутренняя энергия  $U = U(\beta)$  и относительная намагниченность  $m_0 = N^{-1}(S_0, S)$ , где  $S$  — текущая конфигурация. Конфигурации основного  $S_0$  определялась описанным в [15] алгоритмом. Зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  для этих моделей представлена на рис. 1. Как видим, величина  $|\epsilon_0|$  с ростом  $\beta$  монотонно возрастает и применение метода  $n$ -окрестности для анализа этих моделей ограничено малыми значениями  $\beta$ .

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведённый выше анализ показал, что метод  $n$ -окрестности можно успешно применять для анализа систем, у которых соотношение между энергией основного состояния  $E_0$  и величиной  $\sigma_0$  (стандарт энергий, вычисляемый на всём пространстве конфигураций) удовлетворяет неравенству (17). Для таких систем параметр  $|\epsilon_0|$  достаточно мал и разложение (10) обосновано. По сути дела, малость параметра  $|\epsilon_0|$  означает, что седловая точка (9) близка к центру распределения  $D_n(E)$ , т.е.  $U \cong E_n$ .

Для систем со случайными связями известны [14] соотношения  $E_0 = -a\sigma_0$ , где  $a \sim 1$  (например:  $a \approx 1,317$  для 2D-EA-модели,  $a \approx 1,375$  для 3D-EA-модели,  $a \approx 1,666$  для SK-модели). Для таких моделей имеем  $E_0^2 \sigma_0^{-2} = a^2 < 2$ , т.е. условие (17) заведомо не выполняется и приближение метода  $n$ -окрестности некор-

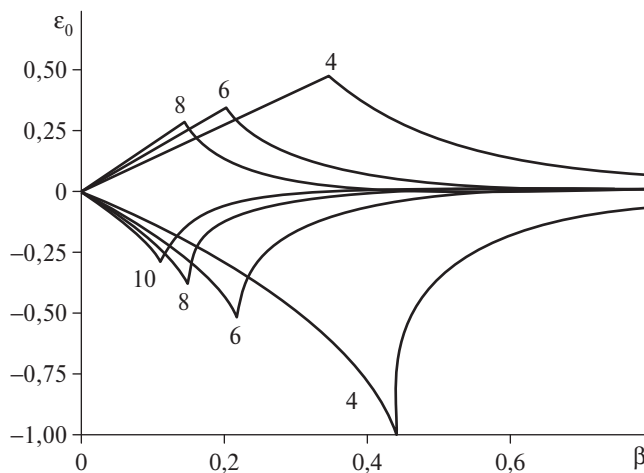


Рис. 2. Зависимость  $\epsilon_0 = \epsilon_0(\beta)$  для моделей с фазовым переходом. В нижней полуплоскости графики для модели Изинга с  $q = 4, 6, 8, 10$ . В верхней полуплоскости графики  $|\epsilon_0(\beta)|$  для модели Бете с  $q = 4, 6, 8$ .

ректно. Сказанное верно и для 1D-модели Изинга, для которой  $E_0^2 \sigma_0^{-2} = 1$ .

Для моделей Изинга на гиперкубе с  $q$  ближайшими соседями критерий применимости метода  $n$ -окрестности (17) принимает вид

$$q \geq \frac{16}{3}. \quad (21)$$

Здесь  $q \equiv 2E_0^2 \sigma_0^{-2}$  — эффективное число ближайших соседей, учитывающее различие связей по разным направлениям решётки. Как видим, это условие неприменимо для 2D-модели Изинга ( $q = 4$ ). Однако это условие хорошо выполняется для моделей Изинга более высокой размерности ( $q \geq 6$ ). Действительно, на рис. 3 приведена зависимость от  $q$  максимального значения параметра малости  $\max|\varepsilon_0| = |\varepsilon_c|$ , достигаемое в критической точке. Видим, что при  $q \geq 6$  величина этого параметра достаточно мала. Оценочные значения (16) находятся между экспериментально измеренными точками для модели Изинга на гиперкубе и данными для решётки Бете, мало от них отличаясь.

Отметим, что в отличие от физических задач в нейросетевых приложениях важна прежде всего скорость алгоритма вычисления свободной энергии. Точность вычисления величины свободной энергии не столь важна и задаётся только точностью алгоритма обучения. В этом смысле рассматриваемое здесь приближение метода  $n$ -окрестности удовлетворяет всем требованиям. Более того, ценность обсуждаемого метода обусловлена ещё и тем, что он позволяет проводить вычисление свободной энергии при наличии внешнего магнитного поля (наличие пороговых условий в нейросетевых задачах).

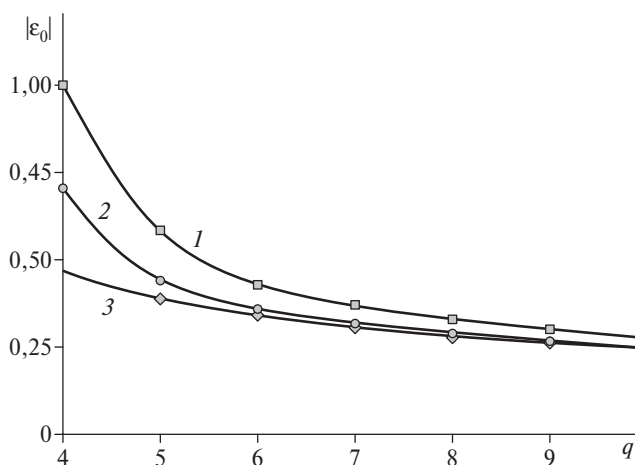


Рис. 3. Зависимость параметра малости  $\max|\varepsilon_0|$  от  $q$ : 1 — экспериментальные точки для модели Изинга на гиперкубе, 2 — оценочное выражение (16), 3 — решётка Бете.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность Я.М. Карандашеву за помощь в проведении численных экспериментов.

**Источник финансирования.** Работа поддержана грантом РФФИ № 18–07–00750.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Amit D., Gutfreund H., Sompolinsky H. Storing Infinite Numbers of Patterns in a Spin-Glass Model of Neural Networks // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 1530–1533.
2. Amit D., Gutfreund H., Sompolinsky H. Statistical Mechanics of Neural Networks near Saturation // Ann. Phys. 1987. V. 173. P. 30–67.
3. Frolov A.A., Husek D., Muraviev I.P. Informational Efficiency of Sparsely Encoded Hopfield-Like Autoassociative Memory // Opt. Memory & Neural Networks (Inform. Optic). 2004. V. 12. P. 177–197.
4. Karandashev I., Kryzhanovsky B., Litinskii L. Weighted Patterns as a Tool to Improve the Hopfield Model // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. 041925.
5. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep Learning // Nature. 2015. V. 521. P. 436.
6. Lin H.W., Tegmark M. Why Does Deep and Cheap Learning Work so Well? // J. Stat. Phys. 2017. V. 168. P. 1223–1247.
7. Baxter R.J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. L.: Acad. Press, 1982.
8. Крыжановский Б.В., Литинский Л.Б. Обобщенное уравнение Брега—Вильямса для систем с произвольным дальним действием // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 680–684.
9. Beale P.D. Exact Distribution of Energies in the Two-Dimensional Ising Model // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 78–81.
10. Kryzhanovsky B.V., Malsagov M.Yu., Karandashev I.M. Investigation of Finite-Size 2D Ising Model with a Noisy Matrix of Spin-Spin Interactions // Entropy. 2018. V. 20. № 9. P. 585.
11. Litinskii L., Kryzhanovsky B. Spectral Density and Calculation of Free Energy // Physica A: Stat. Mech. and Its Appl. 2018. V. 510. P. 702–712.
12. Dixon J.M., Tuszynski J.A., Carpenter E.J. Analytical Expressions for Energies, Degeneracies and Critical Temperatures of the 2D Square and 3D Cubic Ising Models // Physica A. 2005. V. 349. P. 487–510.
13. Häggkvist R., Rosengren A., Andrén D., Kundrotas P., Lundow P.H., Markström K. Computation of the Ising Partition Function for 2-Dimensional Square Grids // Phys. Rev. E. 2004. V. 69. № 4.
14. Kryzhanovsky B., Malsagov M. The Spectra of Local Minima in Spin-Glass Models // Opt. Mem. and Neural Networks. Inform. Opt. 2016. V. 25. № 1. P. 1–15.
15. Karandashev Y.M., Malsagov M.Yu. Polynomial Algorithm for Exact Calculation of Partition Function for Binary Spin Model on Planar Graphs // Opt. Mem. and Neural Networks. Inform. Opt. 2017. V. 26. № 2. P. 87–95.

**APPROXIMATION OF THE  $n$ -VICINITY METHOD****Corresponding Member of the RAS B. V. Kryzhanovsky***Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

Received December 13, 2018

We determined a small parameter that determines the possibility of using the  $n$ -vicinity method to calculate the free energy of a spin system, and found the types of spin systems for which this method is applicable. It is shown that this method is applicable for the analysis of spin systems, where the number of nearest neighbors is greater than  $16/3$ .

*Keywords:* energy distribution, free energy, partition function, Ising model,  $n$ -vicinity method.