

УДК 532.5.013.4

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ УСТОЙЧИВО-СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

А. В. Глазунов<sup>1,\*</sup>, Г. В. Засько<sup>2,\*\*</sup>, Е. В. Мортиков<sup>3</sup>, Ю. М. Нечепуренко<sup>1</sup>

Представлено академиком РАН В.П. Дымниковым 04.04.2019 г.

Поступило 10.04.2019 г.

В данных прямого численного моделирования устойчиво-стратифицированного турбулентного течения Куэтта выделены два типа организованных структур — валики, возникающие при нейтральной и близкой к нейтральной стратификации, и слоистые структуры, проявляющиеся при увеличении статической устойчивости. Показано, что оба типа структур имеют пространственные масштабы и конфигурацию, совпадающие с масштабами и конфигурацией соответствующих оптимальных возмущений упрощённой линейной модели данного течения при тех же числах Ричардсона.

*Ключевые слова:* стратифицированное турбулентное течение Куэтта, мелкомасштабная турбулентность, крупномасштабные структуры, прямое численное моделирование, оптимальные возмущения, максимальная амплификация.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524873257-261>

1. Крупномасштабные организованные структуры на фоне мелкомасштабной турбулентности часто наблюдаются в геофизических пограничных слоях и вносят существенный вклад в обмен импульсом, теплом и влагой между атмосферой и подстилающей поверхностью. В некоторых случаях возникновение таких структур можно объяснить при помощи анализа гидродинамической устойчивости системы, линеаризованной относительно среднего состояния и учитывающей турбулентность путём введения коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности. В частности, этот анализ предсказывает образование валиков в турбулентном слое Экмана как рост неустойчивых мод, связанных с наличием точки перегиба в профиле средней скорости [1, 2]. Однако во многих случаях механизм образования крупномасштабных структур остаётся необъяснённым, а средние течения, на фоне которых эти структуры наблюдаются, оказываются гидродинамически устойчивыми. Например, продольно-ориентированные валики в турбулентных плоско-параллельных нейтрально-стратифицированных течениях, подобных течению Куэтта, не связаны с неустойчивыми модами

оператора упрощённой задачи. Другим примером крупномасштабных структур, не имеющих объяснения, являются слоистые структуры в поле температуры, наблюдаемые в природе и при прямом (DNS) или вихреразрешающем (LES) численном моделировании устойчиво стратифицированной пристеночной турбулентности [3, 4]. Эти структуры проявляются как наклонные слои жидкости со слабоустойчивой стратификацией, разделённые очень тонкими слоями с большими градиентами температуры.

В данной работе образование подобных структур объясняется возникновением и развитием оптимальных возмущений. В качестве объекта исследования выбрано устойчиво-стратифицированное турбулентное течение Куэтта (течение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести между двумя пластинами, движущимися в противоположных направлениях, при охлаждении нижней пластины и нагреве верхней). Для параметризации взаимодействия организованных структур с турбулентностью используется традиционное диффузионное приближение, подразумевающее, что турбулентность и структуры разделены по пространственным и временным масштабам. Все необходимые параметры для расчёта оптимальных возмущений, в частности осреднённые профили скорости и температуры основного течения и коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, были получены по данным прямого численного моделирования. Оптимальные возмущения вычислялись на основе линейной модели с помощью технологии, разработанной и описанной в работах [5, 6].

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской Академии наук, Москва

<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва

<sup>3</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

\*E-mail: [and.glas@gmail.com](mailto:and.glas@gmail.com)

\*\*E-mail: [zasko.gr@bk.ru](mailto:zasko.gr@bk.ru)

Отметим, что оптимальные и близкие к ним возмущения широко используют в аэродинамике для объяснения докритического ламинарно-турбулентного перехода (см. [7] и библиографию там). Их также использовали для объяснения возникновения крупномасштабных атмосферных явлений [8, 9] и крупных полосчатых структур (стриков) в турбулентном пограничном слое [10] и для расширения ансамблей метеорологических прогнозов [11].

2. Рассмотрим в декартовых координатах  $x$  (продольная),  $y$  (вертикальная),  $z$  (поперечная) движение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в бесконечном трёхмерном канале полувысоты  $h$ :  $-h < y < h$ . Нижняя стенка канала движется со скоростью  $\left(-\frac{U_0}{2}, 0, 0\right)$ , верхняя — со скоростью  $\left(\frac{U_0}{2}, 0, 0\right)$ , и на стенках поддерживается температура  $T_1 < T_2$  соответственно.

Выбрав в качестве нормировки скорости  $U_0$  и нормировки длины  $h$ , определим числа Рейнольдса, Прандтля и Ричардсона как  $Re = \frac{U_0 h}{\nu}$ ,  $Pr = \frac{\nu}{\mu}$  и  $Ri = \frac{g(T_2 - T_1)h}{T_1 U_0^2}$  соответственно, где  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\mu$  — коэффициент теплопроводности,  $g$  — ускорение свободного падения, и далее будем использовать безразмерные переменные.

Будем считать, что флуктуации скорости и температуры можно разделить на мелкомасштабные турбулентные флуктуации и возмущения крупного пространственного масштаба, проявляющиеся в виде организованных структур. Параметризуя все взаимодействия с мелкомасштабной турбулентностью с помощью операторов турбулентной вязкости  $\bar{\nu}(y)$  и диффузии  $\bar{\mu}(y)$ , будем рассматривать задачу эволюции крупномасштабных составляющих течения относительно основного течения

$$(\bar{U}(y), 0, 0, \bar{P}(y), \bar{T}(y)) \quad (1)$$

с профилями продольной компоненты скорости  $\bar{U}(y)$  и температуры  $\bar{T}(y)$ , совпадающими со средними турбулентными профилями, полученными в DNS-модели.

Нас будут интересовать малые возмущения вида

$$(\mathbf{v}, p, T) = \text{Real}\{(\mathbf{v}_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma})e^{i(\alpha x + \gamma z)}\} \quad (2)$$

с комплексными амплитудами скорости  $\mathbf{v}_{\alpha\gamma}$ , давления  $p_{\alpha\gamma}$  и температуры  $T_{\alpha\gamma}$  зависящими только от времени и вертикальной координаты. Здесь  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $T$  — темпе-

ратура, а  $\alpha$  и  $\gamma$  — вещественные продольное и поперечное волновые числа соответственно.

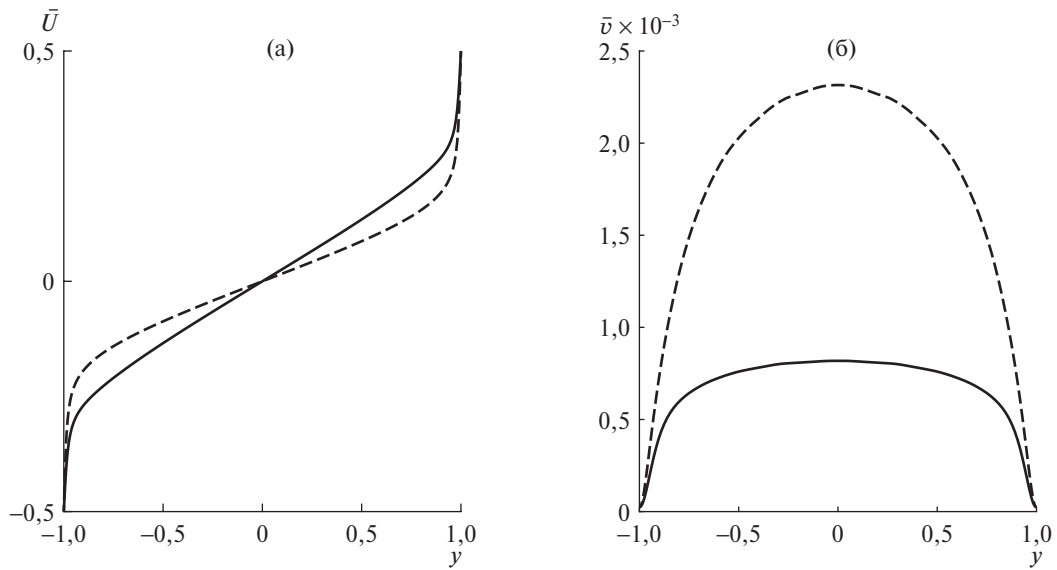
Максимально возможный при фиксированных значениях  $\alpha, \gamma$  подскок  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \frac{\max \mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}(0)}$  средней плотности

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( |\mathbf{v}_{\alpha\gamma}|^2 + \text{Ri} \left( \frac{d\bar{T}}{dy} \right)^{-1} |T_{\alpha\gamma}|^2 \right) dy,$$

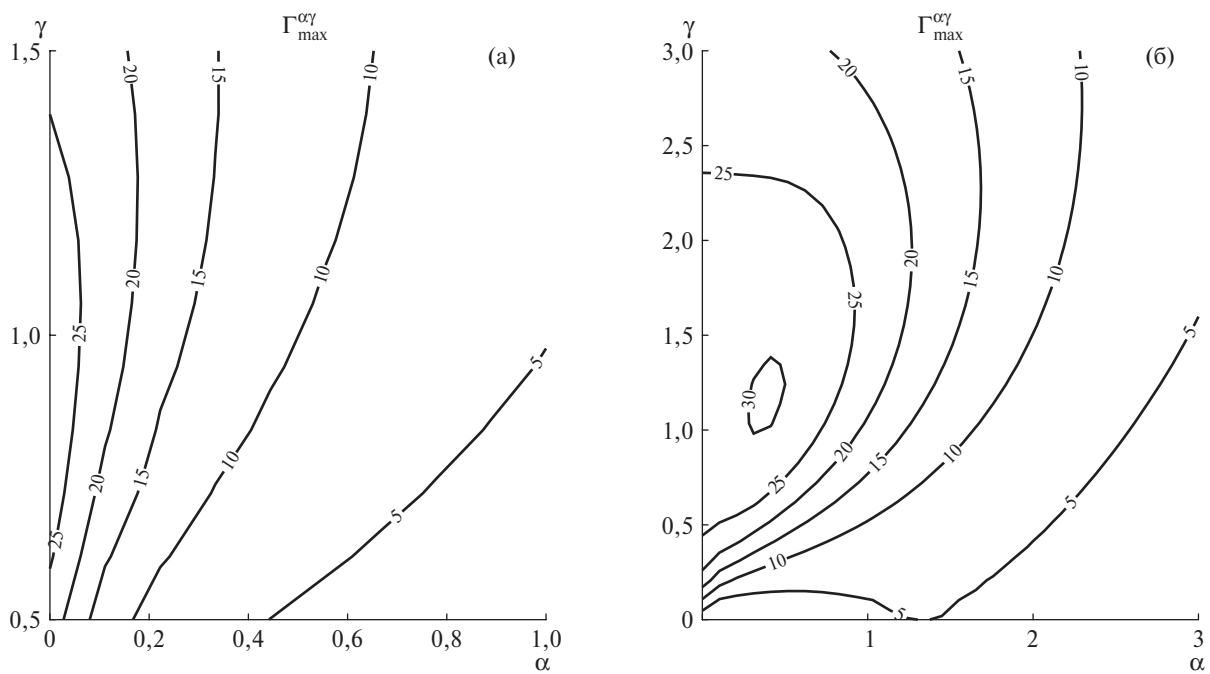
полной энергии возмущения вида (2), где максимум берётся по всем  $t > 0$  и всем начальным возмущениям, удовлетворяющим уравнению неразрывности, будем называть максимальной амплификацией полной энергии, а начальное возмущение, на котором достигается  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$ , — оптимальным возмущением. При этом, учитывая малость рассматриваемых возмущений, мы будем вычислять максимальную амплификацию и оптимальные возмущения на основе системы уравнений тепломассопереноса, линеаризованных относительно основного течения (1).

Профили скорости основного течения при числе Рейнольдса  $Re = 4 \cdot 10^4$  и числах Ричардсона  $Ri = 0,01$  (стратификация, близкая к нейтральной) и  $0,03$  (устойчивая стратификация) изображены на рис. 1а пунктирной и сплошной линиями соответственно. На рис. 1б изображены соответствующие профили турбулентной вязкости. Профили температуры и теплопроводности выглядят подобным образом. Линии уровня максимальной амплификации при тех же числах Рейнольдса и Ричардсона изображены на рис. 2. Видно, что при  $Ri = 0,01$  (рис. 2а) глобальная максимальная амплификация достигается на оптимальном возмущении с  $\alpha = 0$  и  $\gamma \approx 1,0$ , а при  $Ri = 0,03$  (рис. 2б) — на оптимальном возмущении с  $\alpha \approx 0,4$  и  $\gamma \approx 1,0$ . Расчёты оптимальных возмущений, проведённые для различных чисел Рейнольдса ( $2 \leq Re \cdot 10^{-4} \leq 6$ ) и Ричардсона ( $1 \leq Ri \cdot 10^2 \leq 3$ ), выявили существенное различие в форме оптимальных возмущений при нулевом и ненулевых значениях  $\alpha$ . Оптимальные возмущения при  $\alpha = 0$  в момент максимального подскока плотности их полной энергии представляют собой крупномасштабные валики в поперечном сечении канала, а оптимальные возмущения при  $\alpha \neq 0$  в момент максимального подскока плотности их полной энергии — это наклонные крупномасштабные слоистые структуры.

3. На рис. 3а изображено мгновенное векторное поле  $(w, v)$  скорости течения в одном из вертикальных сечений канала, вычисленное с помощью DNS-модели при нейтральной стратификации ( $Ri = 0$ ). Поле имеет случайный характер, и какие-либо ор-



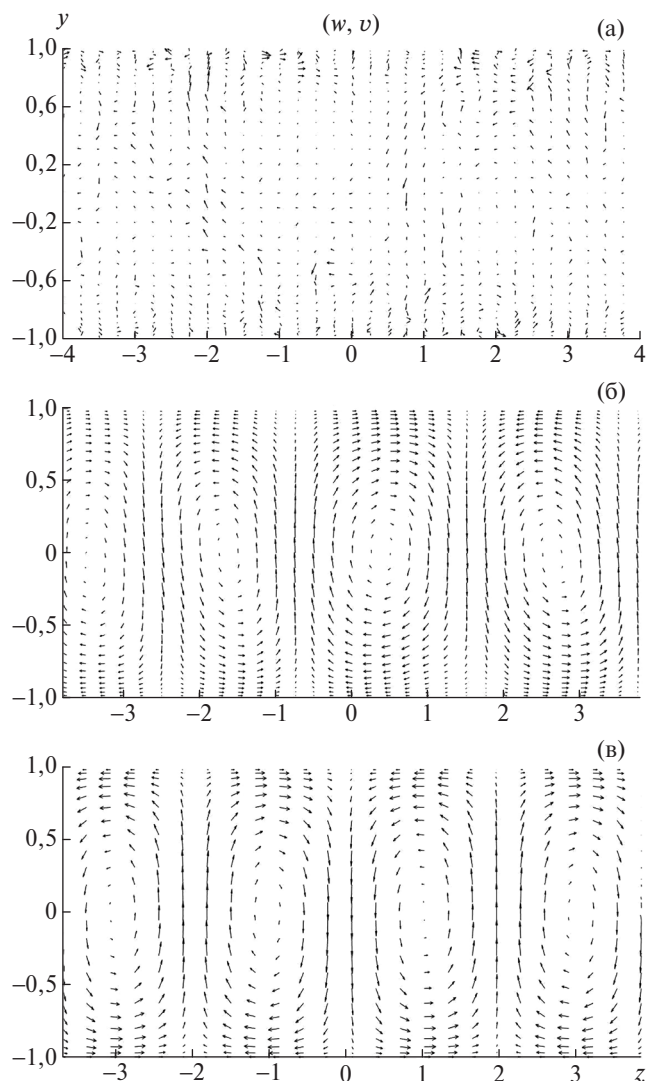
**Рис. 1.** Профили скорости основного течения (а) и турбулентной вязкости (б) при  $Re = 4 \cdot 10^4$  и  $Ri = 0,01$  (пунктирные линии),  $Ri = 0,03$  (сплошные линии).



**Рис. 2.** Линии уровня максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$  в плоскости  $(\alpha, \gamma)$  при  $Ri = 0,01$  (а) и  $0,03$  (б).

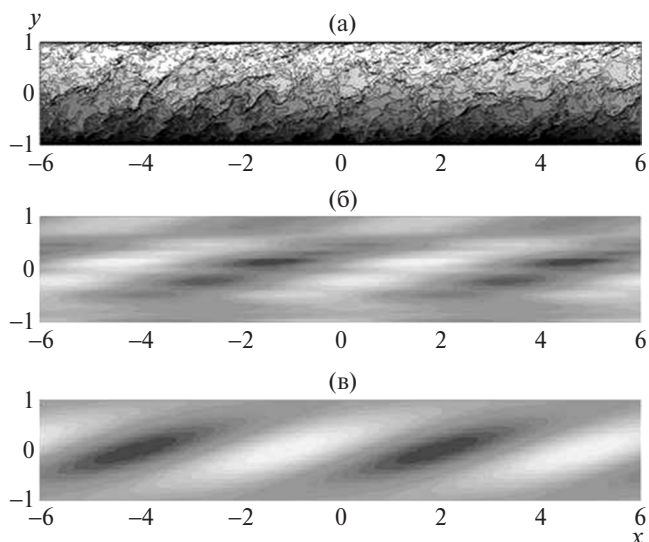
ганизованные структуры в нём не видны. Аналогичная картина наблюдается и в других сечениях по  $x$ . После исключения мелкомасштабной компоненты течения путём осреднения вдоль оси  $x$  рассматриваемое поле скорости преобразуется в чередующиеся по направлению вращения вихри приблизительно круглой формы, изображённые на рис. 3б. В трёхмерном пространстве эти структуры представляют собой спиралевидные вихри (валики). При нейтральной стратификации валики явно выражены

и присутствуют в любой момент времени. С увеличением статической устойчивости их кинетическая энергия падает и появляются промежутки времени, на которых валики полностью затухают. В DNS-расчётах ролики выделяются вплоть до значений числа Ричардсона  $Ri \approx 0,015$ . Оптимальное возмущение, вычисленное при  $Ri = 0,01$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  в момент максимального подскока энергии и изображённое на рис. 3в, имеет аналогичную пространственную структуру.



**Рис. 3.** Поле поперечной и вертикальной компонент скорости: а — мгновенное поле, рассчитанное с помощью DNS-модели при нейтральной стратификации, в одном из вертикальных сечений канала; б — результат осреднения этого поля вдоль оси  $x$ ; в — оптимальное возмущение при  $Ri = 0,01$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  в момент наибольшего подскока энергии.

При  $Ri = 0,03$  в поле температуры на фоне турбулентности заметны крупные наклонные слоистые структуры (рис. 4а, где изображены изолинии температуры в одном из вертикальных сечений канала). Для того чтобы выделить эти крупные структуры, мы выполнили двумерное преобразование Фурье по горизонтальным переменным и рассмотрели крупномасштабные гармоники. Было обнаружено, что каждой такой гармонике соответствует подобное ей по структуре оптимальное возмущение линеаризованной модели в момент максимальной амплификации. В качестве примера на рис. 4б приводится одна из крупномасштабных гармоник, а на рис. 4в —



**Рис. 4.** Поле температуры при  $Ri = 0,03$ : а — мгновенное поле температуры, рассчитанное с помощью DNS-модели, в одном из продольных сечений канала; б — крупномасштабная гармоника, выделенная из этого поля двумерным преобразованием Фурье; в — температура оптимального возмущения при  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{4}$  в момент наибольшего подскока энергии.

соответствующее ей оптимальное возмущение линеаризованной модели. На обоих рисунках видны крупномасштабные слои, имеющие идентичный наклон. Аналогичная картина наблюдалась и для других крупномасштабных гармоник.

4. Представленные в данной работе результаты позволяют заключить, что как валики, так и слоистые структуры, наблюдаемые в устойчиво-стратифицированном турбулентном течении Куэтта, имеют пространственные масштабы и конфигурацию, совпадающие с масштабами и конфигурацией соответствующих оптимальных возмущений линейной модели. При больших числах Ричардсона наибольшая максимальная амплификация в линейной модели достигается на слоистых структурах, а при стратификации, близкой к нейтральной, — на валиках. Тип крупномасштабных организованных структур в DNS при различных числах Ричардсона соответствует типу вычисленных оптимальных возмущений.

**Источники финансирования.** Расчёт оптимальных возмущений выполнен при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–71–20149), прямое численное моделирование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–71–20149) на оборудовании Центра коллективного пользования сверх-

высокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lilly D.K.* // J. Atmos. Sci. 1966. V. 23. № 5. P. 481–494.
2. *Brown A.R.* // J. Atmos. Sci. 1970. V. 27. № 5. P. 742–757.
3. *Sullivan P.P., Weil J.C., Patton E.G., Jonker H.J., Mironov D.V.* // J. Atmos. Sci. 2016. V. 73. № 4. P. 1815–1840.
4. *Глазунов А.В., Мортиков Е.В., Барсков К.В., Каданцев Е.В., Зилитинкевич С.С.* // Изв. РАН. Сер. ФАиО. 2019.
5. *Бойко А.В., Ключнев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016. 123 с.
6. *Nechepurenko Yu.M., Sadkan M.* // SIAM J. Matr. Anal. Appl. 2011. V. 32. № 2. P. 349–363.
7. *Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V.* Physics of Transitional Shear Flows. B.: Springer, 2011. 271 p.
8. *Дымников В.П.* // Изв. АН. Сер. ФАиО. 1988. V. 24. № 7. P. 675–683.
9. *Farrell B.F.* // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. № 9. P. 1193–1206.
10. *Butler K.M., Farrell B.F.* // Phys. of Fluids A: Fluid Dyn. 1993. V. 5. № 3. P. 774–777.
11. *Toth Z., Kalnay E.* // Monthly Weather Rev. 1997. V. 125. № 12. P. 3297–3319.

## OPTIMAL DISTURBANCES OF STABLY STRATIFIED TURBULENT COUETTE FLOW

**A. V. Glazunov<sup>1</sup>, G. V. Zasko<sup>2</sup>, E. V. Mortikov<sup>3</sup>, Y. M. Nechepurenko<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>*Marchuk Institute of Numeric Mathematics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation*

<sup>3</sup>*Research Computing Center, Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Dymnikov April 4, 2019

Received April 10, 2019

Direct numerical simulation data of a stably stratified turbulent Couette flow contains two types of organized structures: the rolls that arise at neutral and close to neutral stratification, and the layered structures, which manifest themselves as the static stability increases. It is shown that both types of structures have spatial scales and forms that coincide with the scales and forms of the corresponding optimal disturbances of the simplified linear model of the Couette flow with the same Richardson numbers.

*Keywords:* stratified turbulent Couette flow, small-scale turbulence, large-scale structures, direct numerical simulation, optimal disturbances, energy amplification.