ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том 487*, № 4, *с.* 355–360

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

О ЗАДАЧЕ КАНТОРОВИЧА С ПАРАМЕТРОМ

В. И. Богачев[1,2,*], И. И. Малофеев[1,3]

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 29.03.2019 г.

Поступило 18.04.2019 г.

Изучается измеримая зависимость мер от параметра в задаче Канторовича оптимальной транспортировки с параметром. Получены широкие достаточные условия существования собственных условных мер, измеримо зависящих от параметра в случае параметрических семейств мер и отображений.

Ключевые слова: задача Канторовича, условная мера, измеримость по параметру.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524874355-360

В сообщении изучается задача Канторовича оптимальной транспортировки с параметром. Кроме того, нами получены широкие достаточные условия существования собственных условных мер, измеримо зависящих от параметра в случае параметрических семейств мер и отображений. Эти результаты дают положительные ответы на вопросы, поставленные С.Б. Куксиным.

Для двух заданных вероятностных пространств $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ и неотрицательной $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримой функции h на $X\times Y$ (называемой функцией стоимости) задача Канторовича (см. [1–3]) состоит в том, чтобы найти инфимум интеграла

$$I_h(\sigma) := \int h d\sigma$$

по всем вероятностным мерам σ на $\mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ с проекциями μ и ν на сомножители. Этот инфимум обозначается через

$$K_h(\mu, \nu)$$

и называется стоимостью транспортировки для h, μ, ν. Если этот инфимум достигается (является минимумом, что имеет место при широких предположениях), то минимизизующие меры называются оптимальными мерами. Меры μ и ν называются маргинальными распределениями.

Предположим теперь, что $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство и для каждого t имеются маргинальные вероятностные меры μ_t и ν_t (которые зависят от t измеримо в том смысле, что функции $t \mapsto \mu_t(A)$ являются $\mathcal{T}$-измеримыми для всех $A \in \mathcal{B}_X$ и аналогично для ν_t), а также что функция стоимости измеримо зависит от параметра t, т.е.

$$h\colon T \times X \times Y \to [0, +\infty)$$

есть $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$-измеримая функция. Положим

$$h_t(x, y) := h(t, x, y).$$

Таким образом, получаем задачу Канторовича с параметром. Виллани [3] рассмотрел случай, когда только маргинальные распределения зависят от параметра (и являются борелевскими мерами на польских пространствах), но функция стоимости не зависит от параметра. Работа [4] имеет дело со случаем функций стоимости типа метрик (таких, что $h(x, y) = \sup|u(x) - u(y)|$, где sup берётся по ограниченным непрерывным функциям u с $|u(x) - u(y)| \le h(x, y)$) на довольно общих пространствах. В ней установлены существование измеримого выбора оптимальной меры и измеримость минимума Канторовича, однако эта измеримость получена относительно σ-алгебры универсально измеримых множеств, но не относительно борелевской σ-алгебры. Аналогичные результаты содержатся также в [5, п. 3.4 и 7.1]. Работа [6] содержит результат для непрерывных функций стоимости на польских пространствах X и Y и произвольного измеримого пространства T, но в обосновании имеется пробел, а действительно доказанный факт таков: если мы рассмотрим пространство $M = C(X \times Y)$ с борелевской σ-алгеброй, соответствующей метрике

$$d_M(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\Bigl(1, \sup_{z\in B_n}|f(z) - g(z)|\Bigr),$$

где $\{B_n\}$ — фиксированная последовательность возрастающих шаров с объединением $X \times Y$, и каждой тройке (h, μ, ν) с неотрицательной функцией $h \in M$

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[2] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва*
[3] *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва*
E-mail: *vibogach@mail.ru*

сопоставим множество $\mathrm{Opt}(h, \mu, \nu)$ всех оптимальных мер, то найдётся выборка, измеримая относительно σ-алгебр $\mathcal{B}(M) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}(X)) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{P}(Y))$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X \times Y))$. Однако это не влечёт измеримость, утверждающуюся в [6] (измеримость относительно $\mathcal{T}$ для общей σ-алгебры $\mathcal{T}$), поскольку отображение $t \mapsto h(t, \cdot, \cdot)$ может не быть измеримым относительно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}(M)$ при единственном предположении, что функция h измерима на $T \times X \times Y$. Дело в том, что для некомпактных пространств Z борелевская σ-алгебра пространства $C_b(Z)$ с его sup-нормой не порождается функционалами вычисления $z \mapsto f(z)$. Следствием этого в ситуации [6] оказывается то, что предполагаемая измеримость функции стоимости недостаточна для применимости установленного результата о выборке. Однако нами показано в теореме 1, что основной результат из [6] верен. Более того, нами показано, что оптимальные транспортировки могут быть выбраны борелевски измеримо относительно параметра для полунепрерывных снизу функций стоимости вместо непрерывных, при условии, что T — суслинское пространство с его борелевской σ-алгеброй.

Пусть X — топологическое пространство. Его борелевская σ-алгебра обозначается через $\mathcal{B}(X)$. Пространство ограниченных непрерывных функций на X с его sup-нормой обозначается через $C_b(X)$.

Если $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство (т.е. $\mathcal{T}$ — σ-алгебра), то отображение $f\colon T \to X$ называется $\mathcal{T}$-измеримым (или $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(X))$-измеримым), если $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ для всех $B \in \mathcal{B}(X)$.

Напомним, что пространство, гомеоморфное полному сепарабельному метрическому пространству, называется польским. Хаусдорфово пространство, являющееся образом полного сепарабельного метрического пространства при непрерывном отображении, называется суслинским или аналитическим (см. [7]). Если такое отображение может быть выбрано взаимно однозначным, то X называют лузинским пространством. Борелевской мерой называют конечную меру на $\mathcal{B}(X)$. Знакопеременная борелевская мера μ может быть записана как $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где μ^+ и μ^- — взаимно сингулярные неотрицательные борелевские меры. Мера $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ называется полной вариацией μ, а число $\|\mu\| = |\mu|(X)$ называется нормой полной вариации или вариационной нормой. Борелевская мера μ называется радоновской, если для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon > 0$ есть такое компактное множество $K_\varepsilon \subset B$, что $|\mu|(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. На суслинских пространствах все борелевские меры радоновы.

Образ меры μ на X относительно измеримого отображения $f\colon X \to Y$ обозначается через $\mu \circ f^{-1}$ и определяется равенством

$$\mu \circ f^{-1}(E) = \mu(f^{-1}(E)),\ E \in \mathcal{B}(Y).$$

Обозначим через $\mathcal{P}(X)$ пространство всех борелевских вероятностных мер на X. Это пространство рассматривается со слабой топологией (см. [8]) и соответствующей борелевской структурой. Для вполне регулярного суслинского пространства X пространство $\mathcal{P}(X)$ также является вполне регулярным суслинским; если X — польское пространство, то $\mathcal{P}(X)$ тоже польское. Эти факты можно найти в [7, гл. 8] или в [8, гл. 5]. Для вполне регулярного суслинского пространства X отображение $m\colon (\Omega, \mathcal{E}) \to \mathcal{P}(X)$ из измеримого пространства $(\Omega, \mathcal{E})$ измеримо в точности тогда, когда все функции

$$\omega \mapsto \int_X \varphi(x) m(\omega)(dx), \quad \varphi \in C_b(X),$$

измеримы относительно $\mathcal{E}$.

Всюду ниже X и Y будут вполне регулярными суслинскими пространствами, в некоторых утверждениях они будут польскими пространствами. Через π_X и π_Y обозначим проекции из $X \times Y$ на X и Y. Для всякой пары мер $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ множество

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\sigma \in \mathcal{P}(X \times Y)\colon \sigma \circ \pi_X^{-1} = \mu,\ \sigma \circ \pi_Y^{-1} = \nu\}$$

выпукло и компактно в слабой топологии. Это множество непусто: оно всегда содержит произведение μ и ν.

Функция f полунепрерывна снизу, если множества $\{f \le c\}$ замкнуты. Для заданных полунепрерывной снизу функции $h \ge 0$ на $X \times Y$ и пары мер $\mu \in \mathcal{P}(X)$ и $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ в описанной выше задаче Канторовича нахождения инфимума $K_h(\mu, \nu)$ величины $I_h(\sigma)$ по всем мерам $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ достигается минимум, если есть мера $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ с $I_h(\sigma) < \infty$ (что всегда выполнено, если функция h ограничена).

Пусть $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство. В случае когда T — топологическое пространство, мы предполагаем, что $\mathcal{T}$ есть его борелевская σ-алгебра $\mathcal{B}(T)$. Предположим также, что

$$h\colon T \times X \times Y \to [0, +\infty)$$

есть такая $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$-измеримая функция, что функция $h_t\colon (x, y) \mapsto h(t, x, y)$ полунепрерывна снизу для каждого t.

Пусть $t \mapsto \mu_t, T \to \mathcal{P}(X)$ — $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{P}(X)))$-измеримое отображение и $t \mapsto \nu_t, T \to \mathcal{P}(Y)$ — $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{P}(Y)))$-измеримое отображение.

Теорема 1. *Пусть X и Y — польские пространства. Предположим, что стоимости транспортировки $K(t) := K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ конечны и функции стоимости $h_t\colon (x, y) \mapsto h(t, x, y)$ непрерывны. Тогда функция K является $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{P}(X \times Y)))$-измеримой. Кроме того, можно выбрать оптимальные меры σ_t так, что отображение $t \mapsto \sigma_t$ будет измеримым относительно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X \times Y))$.*

В следующей теореме снято предположение непрерывности функций стоимости, но требуется, чтобы T было суслинским пространством.

Теорема 2. *Предположим, что T — суслинское пространство, X и Y — польские пространства, $t \mapsto \mu_t$ и $t \mapsto \nu_t$ — борелевские отображения в пространства $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$, причём соответствующие стоимости транспортировки $K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ конечны. Тогда функция $t \mapsto K_{h_t}(\mu_t, \nu_t)$ борелевски измерима и существует отображение $t \mapsto \sigma_t, T \to \mathcal{P}(X \times Y)$, измеримое относительно $\mathcal{B}(T)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X \times Y))$, такое, что для всех $t \in T$ имеем*

$$\sigma_t \in \Pi(\mu_t, \nu_t), \quad \int h(t, x, y)\sigma_t(dxdy) = K_{h_t}(\mu_t, \nu_t).$$

Следствие 1. *В предыдущей теореме существует последовательность борелевски измеримых отображений $\Phi_n\colon T \to \mathcal{P}(X \times Y)$ такая, что для каждого $t \in T$ последовательность $\{\Phi_n(t)\}$ плотна в выпуклом компактном множестве M_t всех h_t-оптимальных мер в $\Pi(\mu_t, \nu_t)$.*

Следствие 2. *В предыдущей теореме оптимальные меры σ_t допускают дезинтегрирования*

$$\sigma_t = \int_Y \sigma_t^y \nu_t(dy)$$

с борелевскими вероятностными мерами σ_t^y на X, которые борелевски измеримы по (t, y).

Для суслинских пространств X и Y имеется следующий результат.

Теорема 3. *Пусть X и Y — вполне регулярные суслинские пространства и T — суслинское пространство. Пусть функции $(x, y) \mapsto h(t, x, y)$ непрерывны для всех t и отображения $t \mapsto \mu_t$ и $t \mapsto \nu_t$ борелевски измеримы. Тогда функция $t \mapsto K(t)$ измерима относительно σ-алгебры $\sigma(\mathcal{S}(T))$, порождённой суслинскими множествами в T.*

Доказательства основных результатов основаны на ряде лемм и будут опубликованы в подробной работе.

Лемма 1. *Пусть $h \le 1$. Тогда для всех $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X)$ и $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(Y)$ имеем*

$$|K_h(\mu_1, \nu_1) - K_h(\mu_2, \nu_2)| \le \|\mu_1 - \mu_2\| + \|\nu_1 - \nu_2\|.$$

Напомним, что отображение Ψ из измеримого пространства $(T, \mathcal{T})$ во множество непустых подмножеств топологического пространства X называется измеримым, если для всякого открытого множества $U \subset X$ множество $\{t\colon \Psi(t) \cap U \ne \phi\}$ входит в $\mathcal{T}$.

Лемма 2. *Предположим, что $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, Z — польское пространство, отображение $t \mapsto \mu_t$ из T в $\mathcal{P}(Z)$ измеримо относительно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(Z))$. Тогда для каждого t существует последовательность возрастающих компактных множеств $Z_n(t) \subset Z$ таких, что множества $\bigcup_t (\{t\} \times Z_n(t))$ входят в $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(Z)$, многозначные отображения $t \mapsto Z_n(t)$ являются $\mathcal{T}$-измеримыми, нормированные ограничения μ_t^n мер μ_t на $Z_n(t)$ задают отображения $t \mapsto \mu_t^n$ из T в $\mathcal{P}(Z)$, измеримые в том же смысле, причём $\|\mu_t^n - \mu_t\| \to 0$.*

То же самое верно, если Z — вполне регулярное лузинское пространство. Значит, утверждение остаётся в силе, если Z — борелевское подпространство польского пространства.

Лемма 3. *Предположим, что $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, X и Y — польские или лузинские пространства, $t \mapsto \mu_t$ и $t \mapsto \nu_t$ являются $\mathcal{T}$-измеримыми отображениями в $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$. Пусть функции $(x, y) \mapsto h(t, x, y)$ полунепрерывны снизу и $K_{h_t}(\mu_t, \nu_t) < \infty$ для каждого t. Тогда для мер μ_t^n и ν_t^n из предыдущей леммы, применяемой к μ_t и ν_t, имеем*

$$K_{h_t}(\mu_t, \nu_t) = \lim_{n \to \infty} K_{h_t}(\mu_t^n, \nu_t^n) \quad \forall t \in T.$$

Лемма 4. *Предположим, что Z — борелевское множество в полном сепарабельном метрическом пространстве с метрикой d, T — суслинское пространство и $h\colon T \times Z \to [0, 2]$ — борелевская функция, полунепрерывная снизу по второй переменной, обладающая следующим свойством: для каждого t есть компактное множество $Z_t \subset Z$ такое, что $h(t, z) \in [0, 1)$ при $z \in Z_t$ и $h(t, z) = 2$ при $z \in Z \setminus Z_t$. Тогда найдётся последовательность борелевских отображений $\psi_j\colon T \to Z$ таких, что*

$$\begin{aligned} &\inf\{h(t, z) + d(x, z)\colon z \in Z\} = \\ &= \inf_j [h(t, \psi_j(t)) + d(x, \psi_j(t))] \quad \forall x \in Z,\ t \in T. \end{aligned}$$

Лемма 5. *При предположениях предыдущей леммы найдётся последовательность борелевских функций $h_n\colon T \times Z \to [0, 2]$ таких, что $h_n \le h_{n+1}$, $h(t, z) = \lim_{n \to \infty} h_n(t, z)$ и функции $z \mapsto h_n(t, z)$ ограничены и липшицевы при каждом t.*

Лемма 6. *Предположим, что полунепрерывные снизу функции стоимости $h_n \ge 0$ возрастают пото-*

чечно к функции h с $K_h(\mu, \nu) < \infty$. Пусть $\pi_n \in \Pi(\mu, \nu)$ — оптимальные меры для h_n, сходящиеся слабо к мере π. Тогда π — оптимальная мера для тройки h, μ, ν. Кроме того,

$$K_h(\mu, \nu) = \lim_{n\to\infty} K_{h_n}(\mu, \nu) = \lim_{n\to\infty} I_{h_n}(\pi_n).$$

Пусть $\mathcal{M}(X)$ — пространство всех знакопеременных мер на X со слабой топологией.

Л е м м а 7. *Пусть $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство, X — вполне регулярное суслинское пространство и $t \mapsto \mu_{t,n}$, $T \to \mathcal{M}(X)$ — такая последовательность $\mathcal{T}$-измеримых отображений, что последовательность мер $\{\mu_{t,n}\}$ имеет слабо компактное замыкание (например, равномерно плотна) для каждого фиксированного $t \in T$. Тогда найдётся такая последовательность $\mathcal{T}$-измеримых функций $t \mapsto \eta_k(t)$ со значениями в $\mathbb{N}$, что для всякого t числа $\eta_k(t)$ возрастают к бесконечности и последовательность мер $\mu_{t,\eta_k(t)}$ сходится к некоторой мере μ_t такой, что отображение $t \mapsto \mu_t$ является $\mathcal{T}$-измеримым.*

При изучении оптимальных мер часто приходится иметь дело с условными мерами. Известно, что для всякой борелевской вероятностной меры μ на суслинском пространстве X и всякого борелевского отображения f из X в суслинское пространство Y на множествах $f^{-1}(y)$ уровня можно задать борелевские вероятностные меры μ^y, называемые условными мерами, порождёнными f, которые обладают следующими свойствами:

1) меры μ^y сосредоточены на $f^{-1}(y)$ для всякого $y \in f(X)$, т.е.

$$\mu^y(f^{-1}(y)) = 1,\ y \in f(X);$$

2) функции $y \mapsto \mu^y(B)$, где $B \in \mathcal{B}(X)$, измеримы относительно σ-алгебры $\sigma(\mathcal{S}(X))$, порождённой классом суслинских множеств в X;

3) для всех борелевских множеств $B \subset X$ и $E \subset Y$ выполнено равенство

$$\mu(B \cap f^{-1}(E)) = \int_E \mu^y(B)\mu \circ f^{-1}(dy).$$

Условные меры с этими свойствами называются регулярными собственными условными вероятностями. Про условные меры см. [7, 9] (связь с поверхностными мерами обсуждается в [10]).

Как и в задаче Канторовича, если μ и f зависят от параметра z, возникает вопрос, можно ли выбрать условные меры μ_z^y, измеримо зависящие от (y, z). Положительный результат был получен в [11] (см. также [12]), но, как и выше, он дан в терминах измеримости относительно продолжения борелевской σ-алгебры, порождённого суслинскими множествами. Пусть X, Y, Z — вполне регулярные суслинские пространства.

Т е о р е м а 4. *Предположим, что дано борелевское отображение*

$$f\colon (x, z) \mapsto f_z(x),\quad X \times Z \to Y.$$

Предположим также, что для каждого $z \in Z$ дана борелевская вероятностная мера μ_z на X такая, что отображение

$$z \mapsto \mu_z,\quad Z \to \mathcal{P}(X)$$

борелевски измеримо или, более общим образом, $(\sigma(\mathcal{S}(Z)), \mathcal{B}(\mathcal{P}(X)))$-измеримо. Тогда для всех пар (μ_z, f_z) существуют собственные условные меры $\{\mu_z^y\}_{y\in Y}$ на X такие, что для всякого борелевского множества B в X функция

$$(y, z) \mapsto \mu_z^y(B)$$

на $Y \times Z$ измерима относительно σ-алгебры $\sigma(\mathcal{S}(Y \times Z))$, что равносильно измеримости отображения

$$(y, z) \mapsto \mu_z^y,\quad Y \times Z \to \mathcal{P}(X)$$

при наделении $Y \times Z$ σ-алгеброй $\sigma(\mathcal{S}(Y \times Z))$ и $\mathcal{P}(X)$ борелевской σ-алгеброй.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что в предыдущей теореме для каждого z отображение $f_z\colon X \to Y$ есть борелевская сюръекция, обладающая правым обратным отображением g_z таким, что отображение $(y, z) \mapsto g_z(y)$ борелевски измеримо; например, отображение $f\colon X \to Y$ не зависит от z и является борелевской сюръекцией, обладающей борелевским правым обратным отображением g. Пусть $z \mapsto \mu_z$ тоже измеримо по Борелю. Тогда существует совместно борелевская версия условнных мер μ_z^y.*

В частности, это верно, если X есть произведение двух вполне регулярных суслинских пространств X_1 и X_2, f есть стандартная проекция на X_2 и отображение $z \mapsto \mu^z$ борелевски измеримо.

Заметим, что в случае пространства-произведения $X = X_1 \times X_2$ и проекции π_{X_2} на X_2 иногда удобнее рассматривать условные меры на общем пространстве X_1 вместо слоёв $X_1 \times \{x_2\} = \pi_{X_2}^{-1}(x_2) \subset X_1 \times X_2$. Оба представления эквивалентны и легко могут переходить от одного к другому.

Утверждение с одним отображением f, не зависящим от параметра, допускает обобщение.

Следствие 3. *Пусть X_1 и X_2 — вполне регулярные суслинские пространства, $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство и $t \mapsto \mu_t$ — отображение из T в $\mathcal{P}(X_1 \times X_2)$, измеримое относительно $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X_1 \times X_2))$. Тогда существует отображение*

$$(t, x_2) \mapsto \mu_t^{x_2} \in \mathcal{P}(X_1),$$

измеримое относительно $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(X_2)$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P}(X_1))$, такое, что меры $\mu_t^{x_2}$ служат условными мерами для μ_t и проекции на X_2.

Следующая параметрическая версия так называемой леммы о склеивании была отмечена в [13, теорема 7.3] (для польских пространств).

Следствие 4. *Пусть X_1, X_2, X_3 — вполне регулярные суслинские пространства, $(T, \mathcal{T})$ — измеримое пространство и*

$$t \mapsto \mu_{1,2,t}, \quad T \to \mathcal{P}(X_1 \times X_2),$$
$$t \mapsto \mu_{2,3,t}, \quad T \to \mathcal{P}(X_2 \times X_3)$$

такие $\mathcal{T}$-измеримые отображения, что для каждого t проекции $\mu_{1,2,t}$ и $\mu_{2,3,t}$ на X_2 совпадают. Тогда существует такое $\mathcal{T}$-измеримое отображение $t \mapsto \eta_t$ из T в $\mathcal{P}(X_1 \times X_2 \times X_3)$, что для каждого t проекция меры η_t на $X_1 \times X_2$ есть $\mu_{1,2,t}$, а проекция на $X_2 \times X_3$ есть $\mu_{2,3,t}$.

Теперь мы увидим, что существование совместно борелевских условных мер, зависящих от параметра z, влечёт некоторые ограничения на отображения f_z, так что совместная борелевская измеримость не всегда может быть гарантирована. Этот факт представляет собой параметрическую версию известного результата из [14].

Предложение 1. *Пусть X, Y, Z — польские пространства. Предположим, что существует совместно борелевская версия условных мер μ_z^y, сосредоточенных на множествах $f_z^{-1}(y)$ при всех $y \in Y$ и $z \in Z$. Тогда найдётся такое борелевское отображение $g\colon Z \times Y \to X$, что $f_z(g(z, y)) = y$ для всех $y \in Y$ и $z \in Z$.*

Известно, что в общем случае нет отображения g с указанными свойствами (см., например, [7, § 6.9]).

Благодарности. Авторы благодарны С.Б. Куксину и А.Р. Ширикяну за полезные обсуждения и замечания.

Источники финансирования. Работа поддержана Российским научным фондом, грант 17–11–01058 при МГУ им. М.В. Ломоносова. Предложение 1 получено в рамках проекта второго автора (И.И.М.), поддержанного Фондом развития теоретической физики и математики "БАЗИС".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачев В.И., Колесников А.В.* // УМН. 2012. Т. 67. № 5. С. 3–110.
2. *Rachev S.T., Rüschendorf L.* Mass Transportation Problems. V. I, II. N.Y.: Springer, 1998.
3. *Villani C.* Optimal Transport, Old and New. N.Y.: Springer, 2009.
4. *Dedecker J., Prieur C., Raynaud De Fitte P.* // Parametrized Kantorovich—Rubinštein Theorem and Application to the Coupling of Random Variables. In: Dependence in Probability and Statistics // Lect. Notes Stat. 2006. V. 187. P. 105–121.
5. *Castaing C., Raynaud de Fitte P., Valadier M.* Young Measures on Topological Spaces. With Applications in Control Theory and Probability Theory. Dordrecht: Kluwer, 2004.
6. *Zhang X.* // Stochastics. 2013. V. 85. № 1. P. 71–84.
7. *Bogachev V.I.* Measure Theory. V. 1, 2. Berlin: Springer, 2007.
8. *Bogachev V.I.* Weak Convergence of Measures. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2018.
9. *Rao M.M.* Conditional Measures and Applications. 2nd ed. Boca Raton (Fl): Chapman and Hall/CRC, 2005.
10. *Bogachev V.I., Malofeev I.I.* // Potential Anal. 2016. V. 44. № 4. P. 767–792.
11. *Малофеев И.И.* // ДАН. 2016. Т. 470. № 1. С. 13–17.
12. *Alekseev G.A., Yurova E.V.* // Theory Stoch. Processes. 2017. V. 22. № 2. P. 1–7.
13. *Kuksin S., Nersesyan V., Shirikyan A.* Exponential Mixing for a Class of Dissipative PDEs with Bounded Degenerate Noise. Arxiv 1802.03250v2.
14. *Blackwell D., Ryll-Nardzewski C.* // Ann. Math. Statist. 1963. V. 34. P. 223–225.

ON THE KANTOROVICH PROBLEMS WITH A PARAMETER

V. I. Bogachev[1,2], I. I. Malofeev[1,3]

[1]*Lomonosov Moscow State University*, *Moscow*, *Russian Federation*
[2]*National Research University Higher School of Economic*, *Moscow*, *Russian Federation*
[3]*Saint Tikhon's Ortodox University*, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin March 29, 2019

Received April 18, 2019

We study measurable dependence of measures on a parameter in the Kantorovich optimal transportation problem with a parameter. Broad sufficient conditions are obtained for the existence of proper conditional measures measurably depending on a parameter in the case of parametric families of measures and mappings.

Keywords: Kantorovich problem, conditional measure, measurability with respect to a parameter.