ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 4, с. 361–364

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ВЫРОЖДЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА

Т. И. Красовицкий

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 03.04.2019 г.

Поступило 25.04.2019 г.

Приведен новый способ построения примеров неединственности вероятностных решений стационарного уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова с помощью сведения уравнения к вырожденному эллиптическому уравнению на ограниченной области.

Ключевые слова: стационарное уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова, вырожденное уравнение, вероятностное решение.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524874361-364

В настоящем сообщении исследуется стационарное уравнение Колмогорова

$$\Delta\rho - \operatorname{div}(b\rho) = 0, \tag{1}$$

где $b(x) = (b^i(x))_{1\le i\le d}$ и $b^i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Так как всякое обобщённое решение ρ уравнения (1) является бесконечно гладкой функцией, то далее считаем, что $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, и рассматриваем уравнение (1) как классическое эллиптическое уравнение в частных производных. Под вероятностным решением мы понимаем неотрицательное решение с единичным интегралом по всему пространству. Проблема единственности вероятностного решения, поставленная ещё А.Н. Колмогоровым (см. [1]), до сих пор не решена окончательно. В работе [2] были построены первые примеры, когда уравнение (1) имеет по крайней мере два вероятностных решения. В работе [3] впервые построены примеры, когда симплекс вероятностных решений имеет бесконечную размерность. Наконец в недавней работе [5] показано, что на $\mathbb{R}^2$ при некоторых дополнительных условиях из существования двух вероятностных решений следует существование бесконечного числа линейно независимых вероятностных решений уравнения Колмогорова.

До сих пор остаётся открытым вопрос о том, может ли симплекс вероятностных решений иметь конечную размерность, большую единицы. Достаточные условия единственности вероятностного решения представлены в работах [2, 6]. Кроме того, систематическое изложение теории уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова дано в [8].

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *tik714@yandex.ru*

В работе предлагается новый метод построения примеров неединственности, принципиально отличающийся от предложенного в [3]. Основная идея состоит в сведении (с помощью подходящей замены координат) задачи о единственности решения на всём $\mathbb{R}^d$ к задаче о единственности решения на ограниченной области. После замены координат уравнение сохраняет вид уравнения Колмогорова, но становится вырожденным, а именно появляется непостоянная матрица диффузии (коэффициенты при производных второго порядка), которая обращается в нуль на границе области. В этой ситуации особую роль играет поведение возле границы области коэффициентов уравнения при производных первого порядка, т.е. коэффициента сноса. В исходной системе координат это соответствует поведению векторного поля b на бесконечности. Несмотря на вырождение матрицы диффузии, при правильном поведении коэффициента сноса можно ставить задачу Дирихле с граничным условием на некоторой части границы области. Выбирая различные граничные условия, можно получать линейно независимые решения, которые после обратной замены координат перейдут в линейно независимые вероятностные решения уравнения (1). Теории вырожденных эллиптических уравнений посвящена обширная литература, в том числе [9–11]. Схожие вопросы в случае дивергентных и бездивергентных эллиптических уравнений на ограниченной области изучались В.В. Жиковым и Н.С. Надирашвили (см. [7, 12]).

Для упрощения изложения рассмотрим случай $d = 2$. Сделаем замену координат Ψ: $y_1 = \psi(x_1)$ и $y_2 = \psi(x_2)$, где $\psi(t) = \operatorname{arctg} t$. Заметим, что

$$\psi'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad \psi''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\psi'''(t) = \frac{6t^2-2}{(1+t^2)^3},$$

и Ψ — диффеоморфизм из $\mathbb{R}^2$ на $G = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\times\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть J — матрица Якоби замены $x = \Psi^{-1}(y)$. Тогда после замены переменной получим на области G вырожденное эллиптическое уравнение

$$\partial^2_{y_1}(A^1\sigma) + \partial^2_{y_2}(A^2\sigma) - \partial_{y_1}(B^1\sigma) - \partial_{y_2}(B^2\sigma) = 0 \quad (2)$$

относительно функции

$$\sigma(y_1, y_2) = |J(y_1, y_2)|\rho(\psi^{-1}(y_1), \psi^{-1}(y_2)).$$

Здесь

$$A^1(\psi(x_1), \psi(x_2)) = (\psi'(x_1))^2,$$
$$A^2(\psi(x_1), \psi(x_2)) = (\psi'(x_2))^2,$$
$$B^1(\psi(x_1), \psi(x_2)) = \psi''(x_1) + b^1(x_1, x_2)\psi'(x_1),$$
$$B^2(\psi(x_1), \psi(x_2)) = \psi''(x_2) + b^2(x_1, x_2)\psi'(x_2).$$

Положим

$$M_1(t) = \operatorname{arctg} t - \pi, \quad M_2(t) = \operatorname{arctg} t,$$

$$b^i(x_1, x_2) = \frac{M_i(x_i) + \psi''(x_i)}{\psi'(x_i)} = (1+x_i^2)M_i(x_i) - \frac{2x_i}{1+x_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда $B^i(x_1, x_2) = 2\psi''(x_i) + M_i(x_i)$ или в координатах (y_1, y_2)

$$B^1(y_1, y_2) = -\frac{4\operatorname{tg} y_1}{(1+(\operatorname{tg} y_1)^2)^2} + y_1 - \pi,$$
$$B^2(y_1, y_2) = -\frac{4\operatorname{tg} y_2}{(1+(\operatorname{tg} y_2)^2)^2} + y_2.$$

Продолжим B^1 на $|y_1| \geq \frac{\pi}{2}$ функцией $y_1 - \pi$, а B^2 продолжим на $|y_2| \geq \frac{\pi}{2}$ функцией y_2. Тогда B^1 и B^2 дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^2$. Функции A^1 и A^2 продолжаем нулём на $|y_1| \geq \frac{\pi}{2}$ и $|y_2| \geq \frac{\pi}{2}$ соответственно и получаем дважды непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}^2$. Перепишем уравнение (2) в виде классического эллиптического уравнения:

$$L\sigma = \alpha^1\partial^2_{y_1}\sigma + \alpha_2\partial^2_{y_2}\sigma + \beta^1\partial_{y_1}\sigma + \beta^2\partial_{y_2}\sigma + \gamma\sigma = 0,$$

где

$$\alpha^1 = A^1, \quad \alpha^2 = A^2, \quad \beta^1 = 2\partial_{y_1}A^1 - B^1,$$
$$\beta^2 = 2\partial_{y_2}A^2 - B^2,$$
$$\gamma = \partial^2_{y_1}A^1 + \partial^2_{y_2}A^2 - \partial_{y_1}B^1 - \partial_{y_2}B^2.$$

Определим знак γ. Имеем

$$\gamma(\psi(x_1), \psi(x_2)) = -(1+x_1^2)M_1'(x_1) - (1+x_2^2)M_2'(x_2) = -2 < 0.$$

Для корректной постановки задачи Дирихле на G необходимо исследовать поведение функции (см. [9]):

$$\varphi = (\beta^1 - \partial_{y_1}\alpha^1)\nu_1 + (\beta^2 - \partial_{y_2}\alpha^2)\nu_2,$$

где ν — внутренняя нормаль к ∂G. Функция φ определена всюду на ∂G, кроме четырёх вершин квадрата G. Обозначим через Σ_0, Σ_1 и Σ_2 множества точек ∂G, в которых $\varphi = 0$, $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$ соответственно. Заметим, что в нашем случае $\partial_{y_i}\alpha^i = 0$ и $\beta^1 = -B^1$, $\beta^2 = -B^2$ на границе G. Следовательно, принадлежность точки границы к множествам Σ_0, Σ_1 и Σ_2 полностью определяется значениями $B^1(y_1, y_2)$ и $B^2(y_1, y_2)$ при $y_1 \to \pm\frac{\pi}{2}$ и $y_2 \to \pm\frac{\pi}{2}$. Несложно проверить, что $\Sigma_0 = \phi$, $\Sigma_2 = \left\{\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right) \middle| x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ и остальная часть границы (за исключением вершин квадрата) относится к Σ_1.

Пусть $x \in \partial G$ и в некоторой окрестности этой точки ∂G задаётся равенством $F = 0$, где F — дважды непрерывно дифференцируемая функция и $F > 0$ внутри G. Важную роль при изучении задачи Дирихле для вырожденного уравнения играет знак выражения $LF(x)$. В рассматриваемой ситуации знак $LF(x)$ совпадает со знаком $\varphi(x)$.

Пусть g — дважды непрерывно дифференцируемая положительная функция на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = -Lg, \quad u|_{\Sigma_2} = 0. \quad (3)$$

Следуя [9], под слабым решением понимаем ограниченную измеримую функцию u на G такую, что

$$\int_G uL^* v dx = \int_G v(-Lg)dx$$

для всякой функции $v \in C^2(G \cup \partial G)$ такой, что $v = 0$ на $\partial G \setminus \Sigma_2$.

Для обоснования существования решения данной задачи применяем теорему 1.5.5 из [9], условия которой в нашей ситуации выполнены: область G является кусочно-гладкой в смысле определения из [9], функция $-Lg$ — ограниченная и измеримая в G (более того, она непрерывна в $G \cup \partial G$), $\gamma = -2 < 0$, выражение LF неположительно во внутренних точках $\Sigma_2 \cup \Sigma_0$ (выражение LF было определено выше). Таким образом, существует ограниченное решение u.

Покажем, что $u + g \geq 0$. В доказательстве теоремы 1.5.5 в [9] искомое решение строится как слабый предел в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ классических решений u_ε уравнений $L_\varepsilon u_\varepsilon = -L_\varepsilon g$ на областях G_ε с граничным условием $u_\varepsilon = 0$ на ∂G_ε. Здесь $\varepsilon > 0$, $L_\varepsilon = L + \varepsilon\Delta$ и G_ε — сглаженная в окрестности вершин граница квадрата (точное определение дано в [9]). Так как $u_\varepsilon + g > 0$ на ∂G_ε, то согласно принципу максимума $u_\varepsilon + g \geq 0$ в G_ε. Следовательно, их предел $u + g$ является неотрицательной функцией.

Проверим, что если $g \neq 0$ на Σ_2, то равенство $u = -g$ невозможно. Действительно, для функции g и всякой функции $v \in C^2(G \cup \partial G)$ такой, что $v = 0$ на $\partial G \setminus \Sigma_2$, имеет место равенство

$$\int_G gL^* v dx = \int_G vLg dx - \int_{\Sigma_2} \varphi v g dx.$$

Напомним, что $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$ на Σ_2 и $g \neq 0$ на Σ_2. Следовательно, равенство из определения решения u не может выполняться для всех v, так как интеграл по Σ_2, вообще говоря, не равен нулю.

Теперь покажем, как построить линейно независимые решения. Предположим, что функции $g_1, \ldots, g_N$ линейно независимы на Σ_2 и $u_1, \ldots, u_N$ — соответствующие решения задачи Дирихле (3). Докажем, что $u_1 + g, \ldots, u_N + g$ линейно независимы на G. Для всяких чисел $\lambda_2, \ldots, \lambda_N$ функция

$$u = u_1 - \lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_N u_N$$

является решением задачи Дирихле (3) с нулевым граничным условием на Σ_2 и правой частью $-Lg$, где

$$g = g_1 - \lambda_2 g_2 - \ldots - \lambda_N g_N.$$

Если $u_1 + g_1 = \lambda_2(u_2 + g_2) + \ldots + \lambda_N(u_N + g_N)$, то $u = -g$, а это невозможно.

Таким образом, выбирая линейно независимые на Σ_2 положительные функции $g_1, \ldots, g_N$, можно построить ограниченные неотрицательные линейно независимые решения $\sigma_1 = u_1 + g_1, \ldots, \sigma_N = u_N + g_N$ уравнения (2) на G. В частности, все решения σ_i интегрируемы на G. Домножая эти функции на подходящие константы, можно считать, что интегралы от σ_i по G равны единице. Возвращаясь к старым координатам, получаем линейно независимые вероятностные решения ρ_i уравнения (1). Действительно, ρ_i задаются равенствами

$$\rho_i(x_1, x_2) = \\ = \sigma_i(\psi(x_1), \psi(x_2))|J(\psi^{-1}(x_1), \quad \psi^{-1}(x_2))|^{-1} \geq 0,$$

из которых видно, что линейная зависимость ρ_i влечёт линейную зависимость σ_i. Кроме того, по формуле замены переменных в интеграле получаем

$$1 = \int_G \sigma_i dy_1 dy_2 = \int_G \rho_i |J| dy_1 dy_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_i dx_1 dx_2.$$

Итак, доказано следующее

Предложение 1. *Уравнение Колмогорова* (1), *в котором векторное поле b задано формулами*

$$b^1(x_1, x_2) = (1 + x_1^2)(\operatorname{arctg} x_1 - \pi) - \frac{2x_1}{1 + x_1^2},$$

$$b^2(x_1, x_2) = (1 + x_2^2)\operatorname{arctg} x_2 - \frac{2x_2}{1 + x_2^2},$$

имеет бесконечномерный симплекс вероятностных решений.

Отметим, что в построенном примере компонента b^1 векторного поля b зависит только от x_1, b^2 — только от x_2. Несложно проверить, что одномерные уравнения Колмогорова с коэффициентами b^1 и b^2 имеют вероятностные решения $u(x_1)$ и $w(x_2)$, а произведение $u(x_1)w(x_2)$ является вероятностным решением уравнения с векторным полем b. Однако помимо этого решения уравнение имеет ещё бесконечно много линейно независимых вероятностных решений.

Следуя изложенной схеме, можно построить целую серию примеров. Естественно возникает следующий вопрос. Для всякого ли уравнения (1), имеющего несколько вероятностных решений, можно подобрать такую область и замену координат, что для соответствующего вырожденного уравнения можно корректно поставить задачу Дирихле? Этот вопрос представляет интерес и для уравнений, в которых уже известно, что симплекс вероятностных решений имеет бесконечную размерность.

Источник финансирования. Работа поддержана грантами РФФИ 18–31–20008 и DFG RO 1195/12-1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmogoroff A.N.* // Math. Ann. 1931. B. 104. S. 415–458.
2. *Богачев В.И.*, *Рёкнер М.*, *Штаннат В.* // Мат. сб. 2002. Т. 193. № 7. С. 3–36.

3. *Shaposhnikov S.V.* // J. Funct. Anal. 2008. V. 254. № 10. P. 2690–2705.
4. *Pozio M.A.*, *Punzo F.*, *Tesei A.* // J. Math. Pures Appl. 2008. V. 90. P. 353–386.
5. *Богачев В.И.*, *Красовицкий Т.И.*, *Шапошников С.В.* // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 489–493.
6. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
7. *Жиков В.В.* // Функцион. анализ и его прил. 2004. Т. 38. № 3. С. 15–28.
8. *Bogachev V.I.*, *Krylov N.V.*, *Röckner M.*, *Shaposhnikov S.V.* Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2015.
9. *Олейник О.А.*, *Радкевич Е.В.* Уравнения с неотрицательной характеристической формой. М.: Изд-во МГУ, 2010.
10. *Олейник О.А.* // Мат. сб. 1966. Т. 69. № 1. С. 111–140.
11. *Friedman A.*, *Pinsky A.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 186. P. 359–383.
12. *Nadirashvili N.S.* // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4). 1997. V. 24. P. 537–550.

DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS AND NONUNIQUENESS OF SOLUTIONS TO THE KOLMOGOROV EQUATION

T. I. Krasovitskii

Lomonosov Moscow State University, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev April 3, 2019

Received April 25, 2019

In this paper we propose a new method of constructing examples of nonuniqueness of probability solutions by reducing the stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equation to a degenerate elliptic equation on a bounded domain.

Keywords: stationary Fokker–Planck–Kolmogorov equation, degenerate equation, probability solution.