ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 4, с. 365–369

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

О СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ (К ТЕОРИИ АРОНШАЙНА—ДОНОХЬЮ—КАЦА)

М. М. Маламуд

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 24.12.2018 г.

Поступило 26.12.2018 г.

Основные результаты теории Ароншайна—Донохью—Каца распространяются на n-мерные (в резольвентном смысле) возмущения $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ оператора $A_0 = A_0^*$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Применяя технику граничных троек, мы описываем сингулярный непрерывный и точечный спектры расширений A_B симметрического оператора A в терминах функции Вейля $M(\cdot)$ пары $\{A, A_0\}$ и граничного n-мерного оператора $B = B^*$. Устанавливается ортогональность сингулярных частей $E^s_{A_B}$ и $E^s_{A_0}$ спектральных мер E_{A_B} и E_{A_0} операторов A_B и A_0 при условии, что кратность сингулярного спектра оператора A_0 максимальна. Исследована кратность сингулярного спектра специальных расширений прямых сумм $A = A^{(1)} \oplus A^{(2)}$. В частности, показано, что она не может быть максимальной в отличие от кратности абсолютно непрерывного спектра. Этот результат обобщает теорему Каца о кратности сингулярного спектра оператора Шрёдингера на оси и уточняет её.

Ключевые слова: конечномерные возмущения, сингулярный спектр, точечный спектр, кратность спектра.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524874365-369

1. Введение. В сообщении основные результаты теории Ароншайна—Донохью—Каца [1, 6, 7] (см. также [12, 14]) распространяются на такие возмущения $\tilde{A}$ оператора $A_0 = A_0^*$ в $\mathfrak{H}$, что разность их резольвент n-мерна. Имея в виду применения к дифференциальным операторам, мы ограничиваемся сингулярными (не аддитивными) возмущениями, рассматривая A_0 и $\tilde{A}$ как расширения симметрического оператора A с индексами дефекта $n_{\pm}(A) = n < \infty$. Применяя технику граничных троек (см. [3, 4]), мы описываем сингулярный непрерывный и точечный спектры расширений A_B (вида (2)) оператора A в терминах функции Вейля $M(\cdot)$ (невозмущённого) оператора A_0 и матрицы B. Мы также устанавливаем ортогональность сингулярных частей $E^s_{A_B}$ и $E^s_{A_0}$ спектральных мер E_{A_B} и E_{A_0} операторов A_B и A_0, считая кратность сингулярного спектра оператора A_0 максимальной. Получено также обобщение теоремы Каца (7) о кратности сингулярного спектра и одновременно её уточнение (см. Предложение 3(ii)). В частности, показано, что кратность сингулярного спектра специальных расширений прямых сумм $A = A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ не может быть максимальной в отличие от кратности абсолютно непрерывного спектра. Эти результаты применяются к граничным задачам для оператора Шрёдингера и квантовым графам.

Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: *malamud3m@gmail.com*

Обозначения. $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ — совокупность замкнутых линейных операторов с плотной областью определения в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; $\mathrm{dom}(T)$ — область определения оператора $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$; $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — алгебра ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$; $E_T(\cdot)$ — спектральная мера оператора $T = T^* \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$; $E_T(\cdot) = E_T^{ac}(\cdot) \oplus E_T^s(\cdot) = E_T^{ac}(\cdot) \oplus \oplus E_T^{sc}(\cdot) \oplus E_T^p$ — разложение Лебега—Жордана меры $E_T(\cdot)$ на абсолютно непрерывную и сингулярную компоненты; $\sigma_p(T)$ — точечный спектр оператора T.

2. Граничные тройки и собственные расширения. Пусть A — замкнутый симметрический плотно определённый оператор в $\mathfrak{H}$ с индексами дефекта $n_+(A) = n_-(A)$, $\mathfrak{N}_z := \ker(A^* - zI)$ — дефектное подпространство, $z \in \mathbb{C}_{\pm}$.

Оператор A называют простым, если он не допускает представления $A = A' \oplus A''$, в котором $A' = (A')^* \neq 0$, а A'' симметричен.

Обозначим Ext_A совокупность собственных замкнутых расширений оператора A, т.е. $\tilde{A} \in \mathrm{Ext}_A$, если $A \subset \tilde{A} \subset A^*$. Расширения $A', A'' \in \mathrm{Ext}_A$ называют дизъюнктными, если $\mathrm{dom}(A') \cap \mathrm{dom}(A'') = \mathrm{dom}\, A$.

Определение 1 [3, 4]. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и Γ_j: $\mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H}$, $j \in \{0, 1\}$, — линейные отображения, называют граничной тройкой оператора A^*, если:

(i) справедлива вторая формула Грина

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathrm{dom}(A^*); \tag{1}$$

(ii) отображение $\Gamma := \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$: $\mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ сюръективно.

Тройка Π порождает самосопряжённые расширения $A_j := A^* \upharpoonright \ker\Gamma_j$, $j \in \{0, 1\}$.

Предложение 1 [4]. *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — *граничная тройка для* A^*. *Тогда* $\dim\mathcal{H} = n_{\pm}(A)$ *и отображение*

$$\Theta \to A_\Theta := \Gamma^{-1}\Theta = \\ = \{f \in \mathrm{dom}(A^*): \Gamma f = \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} \in \Theta\} \tag{2}$$

устанавливает биективное соответствие между множеством $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *замкнутых линейных отношений в* $\mathcal{H}$ *и множеством* Ext_A. *При этом*:

(i) $(A_\Theta)^* = A_{\Theta^*}$;

(ii) $A_\Theta \subset (A_\Theta)^* (A_\Theta = A_\Theta^*) \Leftrightarrow \Theta \subset \Theta^* (\Theta = \Theta^*)$;

(iii) A_Θ *и* A_0 *дизъюнктны в точности тогда, когда* $\Theta = B \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$. *В этом случае* (2) *принимает вид*

$$A_\Theta = A_B = A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0).$$

3. Функция Вейля и спектры расширений.

Определение 2 [4]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*. Функцией Вейля, соответствующей граничной тройке Π, называют оператор-функцию $M(\cdot)$, определяемую равенством

$$\Gamma_1 f_z = M(z)\Gamma_0 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z, \quad z \in \rho(A_0). \tag{3}$$

Функция Вейля определена корректно и является $R[\mathcal{H}]$-функцией: $\mathrm{Im}\, z \cdot \mathrm{Im}\, M(z) > 0$ и $M(\bar{z}) = M^*(z)$. Кроме того, $0 \in \rho(\mathrm{Im}(M(i)))$ (см. [4]).

Будучи $R[\mathcal{H}]$-функцией, $M(\cdot)$ допускает интегральное представление

$$M(z) = C_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2}\right) d\Sigma_M(t), \quad z \in \mathbb{C}_{\pm}, \tag{4}$$

в котором $C_0 = C_0^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\Sigma = \Sigma_M(\cdot)$ — операторная борелевская мера на $\mathbb{R}$, называемая представляющей мерой для $M(\cdot)$. При этом $\mathrm{Im}M(i) = \int_{\mathbb{R}} (1 + t^2)^{-1} d\Sigma(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $(\mathrm{Im}\, M(i))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Пусть A — простой симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда функция Вейля $M(\cdot)$ определяет пару $\{A, A_0\}$ однозначно с точностью до унитарной эквивалентности (см. [4]). Более того, в [10] доказано, что меры $\Sigma := \Sigma_M$ и E_{A_0} спектрально эквивалентны, т.е. они эквивалентны, $\Sigma \sim E_{A_0}$, и их функции кратности $N_\Sigma(\cdot)$ и $N_{E_{A_0}}(\cdot)$ равны E_{A_0} — п.в.

4. Ортогональность сингулярных компонент спектральных мер.

Определение 3. Две операторные меры $\Sigma_1(\cdot)$ и $\Sigma_2(\cdot)$ называют ортогональными (взаимно сингулярными), если существуют борелевские подмножества δ_1 и δ_2 такие, что $\delta_1 \cap \delta_2 = \phi$ и $\Sigma_j(\mathbb{R}) = \Sigma_j(\delta_j)$, $j \in \{1, 2\}$.

Теорема 1. *Пусть A — простой симметрический оператор в* $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = n < \infty$, $A_0 = A_0^*$ — *его самосопряжённое расширение и* $E_{A_0}(\cdot)$ — *его спектральная мера, а* $E_{A_0}^s$ — *её сингулярная часть. Пусть сингулярный спектр* $\sigma_s(A_0)$ *имеет максимальную кратность, т.е.* $N_{E_{A_0}^s}(t) = n$ *для* $E_{A_0}^s$-*п.в.* $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для каждого расширения* $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathrm{Ext}_A$ *оператора* A, *дизъюнктного с* A_0, *сингулярные части* $E_{\tilde{A}}^s$ *и* $E_{A_0}^s$ *их спектральных мер* $E_{\tilde{A}}$ *и* E_{A_0} *взаимно сингулярны* (*ортогональны*).

При $n = 1$ теорема 1 совпадает с теоремой Аронсайна—Донохью [1, 6].

Пример 1. Пусть $Q(\cdot) = Q^*(\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{n\times n})$ и $A = A_{\min}$ — минимальный оператор, ассоциированный с дифференциальной операцией

$$\mathcal{L} := \frac{-d^2}{dx^2} \otimes I_n + Q(\cdot) \quad \text{в} \quad L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n). \tag{5}$$

Предположим, что для $\mathcal{L}$ имеет место случай предельной точки в бесконечности, т.е. $n_{\pm}(A) = n$. Пусть далее A_B — расширение вида

$$A_B = A^* \upharpoonright \mathrm{dom}\, A_B, \\ \mathrm{dom}\, A_B = \{y \in \mathrm{dom}\, A^*: y'(0) = By(0)\}, \tag{6}$$

и A_0 — оператор задачи Дирихле, $\mathrm{dom}A_0 = \{y \in \mathrm{dom}\, A^*: y(0) = 0\}$.

Если кратность сингулярного спектра $\sigma_s(A_0)$ максимальна, то сингулярные части $E_{A_B}^s$ и $E_{A_0}^s$ спектральных мер E_{A_B} и E_{A_0} ортогональны.

При этом ac-части операторов A_B и A_0 унитарно эквивалентны [8].

5. Точечный спектр расширений. Вначале мы охарактеризуем собственные значения оператора A_B максимальной кратности.

Теорема 2. *Пусть A — простой симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = n$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*, $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля, $\Sigma(\cdot)$ — её представляющая мера, $B = B^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $M_B(\cdot) := (B - M(\cdot))^{-1}$. Для того чтобы $x_0 (\in \mathbb{R})$ было собственным значением максимальной кратности оператора A_B, т.е. для равенства $\dim\ker(A_B - x_0 I) = n$, необходимо и достаточно, чтобы*

(i) $M(x_0 + i0) = \lim\limits_{y\downarrow 0} M(x_0 + iy) = B$;

(ii) $T(x_0) := \int\limits_{\mathbb{R}} (t - x_0)^{-2} d\Sigma(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1) = \mathbb{C}^{n\times n}$.

Более того, $\ker T(x_0) = 0$ и справедливо равенство $T(x_0)^{-1} = \Sigma_B(\{x_0\})$, в котором $\Sigma_B(\cdot) := \Sigma_{M_B}(\cdot)$ — представляющая мера для $M_B(\cdot)$.

При $n = 1$ теорема 2 обобщает результат Аронщайна [1, теорема 4] и Донохью [6, теорема 1].

Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*, $M(\cdot)$ — соответствующая функция Вейля с представляющей мерой $\Sigma(\cdot)$, $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Для каждого подпространства $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ рассмотрим их блочно-матричные представления относительно ортогонального разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$M(z) = (M_{ij}(z))_{i,j=1}^2, \quad B = (B_{ij})_{i,j=1}^2, \quad \Sigma(t) = (\Sigma_{ij}(t))_{i,j=1}^2. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^{\perp}$, $M_{ij}(\cdot) := \pi_i M(\cdot)\upharpoonright\mathcal{H}_j$, $B_{ij} := \pi_i B\upharpoonright\mathcal{H}_j$, $\Sigma_{ij}(\cdot) := \pi_i\Sigma(\cdot)\upharpoonright\mathcal{H}_j$ и π_j — ортопроектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_j$, $j \in \{1, 2\}$. С подпространством $\mathcal{H}_1$ естественно связано симметрическое расширение A' оператора A (см. [5]):

$$A' = A_B \upharpoonright \operatorname{dom} A', \quad \operatorname{dom} A' = \{f \in \operatorname{dom} A_B: \pi_1\Gamma_0 f = 0\}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Если $x_0 \in \sigma_p(A_B)$ и $\dim\ker(A_B - x_0 I) = k < n$, то существует подпространство $\mathcal{H}_1 (\subset \mathcal{H})$, $\dim\mathcal{H}_1 = k$, такое, что справедливы соотношения:*

(i) $\lim\limits_{y\downarrow 0} M_1(x_0 + iy) = 0$,

$M_1(z) := -C_{11}(z) + C_{12}(z)C_{22}^{-1}(z)C_{21}(z)$;

(ii) $T_1(x_0) := \int\limits_{\mathbb{R}} (t - x_0)^{-2} d\Sigma_{M_1}(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$

и $\ker T_1(x_0) = \{0\}$,

$C_{ij}(z) := B_{ij} - M_{ij}(z)$, $j \in \{1, 2\}$.

При этом $\pi_1\Sigma_B(\{x_0\})\upharpoonright\mathcal{H}_1 = T_1(x_0)^{-1}$.

Обратно, если для некоторого подпространства $\mathcal{H}_1 (\subset \mathcal{H})$ выполнены (i) *и* (ii), *то*

$$N_{\Sigma_B^p}(x_0) = \dim\ker(A_B - x_0 I) = \dim\ker(A' - x_0 I) + k.$$

В частности, равенство $\dim\ker(A_B - x_0 I) = \dim\mathcal{H}_1 = k$ имеет место, если $x_0 \notin \sigma_p(A')$, например, если оператор A' простой.

Сингулярный (в частности, точечный) спектр может лежать на абсолютно непрерывном, даже в случае максимальной кратности последнего. Однако его кратность $N_{\Sigma_B^s}(x)$ не может быть произвольной в точках специального носителя $S'_{ac}(\Sigma)$ меры Σ. Пусть $M(\cdot)$ — $R[\mathcal{H}]$-функция вида (4) и Σ — её представляющая мера. По теореме Радона—Никодима

$$\Sigma^{ac}(x) = \int\limits_0^x \Psi(t)dt, \quad (1 + t^2)^{-1}\Psi \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n\times n}), \quad \Psi(t) \geq 0, \ t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Пусть $S'_{ac}(\Sigma)$ — множество точек $x \in \mathbb{R}$, в которых существует симметричная производная $(D\Sigma)(x) = (D\Sigma^{ac})(x) = \Psi(x) \neq 0$. Известно [2, 11], что $S'_{ac}(\Sigma)$ — носитель (не обязательно топологический) меры Σ^{ac}. Положим

$$S'_{ac}(\Sigma; k) := \{x \in S'_{ac}(\Sigma): \operatorname{rank}\Psi(x) = k\}, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{10}$$

Предложение 2. *Пусть выполнены условия теоремы 2, $B = B^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $x_0 \in S'_{ac}(\Sigma; k)$. Если $x_0 \in \sigma_p(A_B)$, то $\dim\ker(A_B - x_0 I) \leq n - k$.*

6. Непрерывный сингулярный спектр расширений. Пусть $M \in R[\mathcal{H}]$ и Σ — её представляющая мера из формулы (4) и $\rho(t) = \operatorname{tr}\Sigma^{sc}(t)$. Полагаем

$$S'_{sc}(\Sigma^{sc}; k) := \{x \in S'_{sc}(\rho): \exists\Psi_\rho(x) = \frac{d\Sigma^{sc}}{d\rho}(x), \ \operatorname{rank}\Psi_\rho(x) = k\}, \ k \leq n.$$

Следующее обобщение классического результата Валле—Пуссена на матричные меры в $\mathcal{H}$ играет существенную роль в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть Σ^{sc} — сингулярная непрерывная мера в $\mathcal{H}$, $\rho(t) = \operatorname{tr}\Sigma^{sc}(t)$. Тогда для каждого $x \in S'_{sc}(\Sigma^{sc}; n)$ существует равномерный предел*

$$u - \frac{d\Sigma^{sc}}{dt}(x) = u - \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\Sigma^{sc}(x+\varepsilon) - \Sigma^{sc}(x-\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty, \quad x \in \tilde{S}'_{sc}(\Sigma^{sc}). \tag{11}$$

При этом множество $S'_{sc}(\Sigma) = S'_{sc}(\Sigma^{sc}) := \bigcup_{k=1}^{n} S'_{sc}(\Sigma; k)$ *является носителем меры* Σ^{sc}, *т.е.* $\rho(S'_{sc}(\rho) \setminus S'_{sc}(\Sigma^{sc})) = 0$.

Аналогом теоремы 2 является следующая теорема о максимальной кратности сингулярного непрерывного спектра оператора A_B.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и* $x_0 \in S'_{sc}(\Sigma_B; n)$. *Тогда справедливы соотношения*:

(i) $M(x_0 + i0) = \lim_{y \downarrow 0} M(x_0 + iy) = B$;

(ii) $$\int_{\mathbb{R}} (t - x_0)^{-2} d(\Sigma(t)h, h) = u - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|t - x_0| > \varepsilon} (t - x_0)^{-2} d(\Sigma(t)h, h) = \infty,$$ $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Обратно, если выполнены условия (i) *и* (ii), *то* $x_0 \in S'_{sc}(\Sigma_B)$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $x_0 \in S'_{sc}(\Sigma_B; k)$. *Тогда существует подпространство* $\mathcal{H}_1 (\subset \mathcal{H})$, $\dim \mathcal{H}_1 = k < n$, *такое, что справедливы соотношения*:

(i) $\lim_{y \downarrow 0} M_1(x_0 + iy) = 0$,
$$M_1(z) := -C_{11}(z) + C_{12}(z)C_{22}^{-1}(z)C_{21}(z);$$

(ii) $$(T_1(x_0)h, h) := \int_{\mathbb{R}} (t - x_0)^{-2} d(\Sigma_{M_1}(t)h, h) = \infty,$$ $h \in \mathcal{H}_1 \setminus \{0\}$.

Обратно, если выполнены условия (i) *и* (ii), *то* $x_0 \in S'_{sc}(\Sigma_B)$.

Теоремы 1, 3 и 5 позволяют строить любопытные примеры.

Пример 2. Пусть $Q_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{n \times n})$, $Q_1(\cdot) \geq 0$, и A — минимальный оператор, ассоциированный в $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^n)$ с операцией Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}$ вида (5). Тогда A — простой симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = n$ и тройка $\Pi_1 = \{\mathbb{C}^n, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\Gamma_0 f = f(0)$ и $\Gamma_1 f = f'(0)$, является граничной для A^*. При этом (неортогональная) спектральная мера Σ_1 соответствующей функции Вейля $M(\cdot)$ (см. (4)), абсолютно непрерывна, $\Sigma_1 = \Sigma_1^{ac}$, и допускает представление

$$\Sigma_1^{ac}(t) = \int_0^t \Phi(s) ds, \quad \Phi(\cdot) \in C(\mathbb{R}_+) \otimes \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Phi(s) > 0, \quad s \in \mathbb{R}_+, \tag{12}$$

причём $\det \Phi(s) > 0$ и $(1 + s^2)^{-1} \cdot \operatorname{tr} \Phi(s) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Пусть далее $\Sigma_2(\cdot) = \Sigma_2^s(\cdot)$ — сингулярная $(n \times n)$-матричная мера с компактным носителем и $N_{\Sigma_2} = n$ для Σ_2-п.в. $t \in \mathbb{R}$. Согласно матричной версии теоремы Гельфанда—Левитана [13] найдётся такой потенциал $Q_2(\cdot) = Q_2^*(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbb{C}^{n \times n})$, что задача Дирихле для оператора вида $-D_x^2 + Q_2$ имеет спектральную меру $\Sigma = \Sigma_1^{ac} + \Sigma_2^s$. В силу теорем 3 и 5 каждый оператор A_B вида (6) имеет чисто абсолютно непрерывный спектр кратности n.

Пример 3. Пусть $\{C_k = C_k^*\}_0^{\infty} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$, $\varepsilon^{-1} I_n > C_k > \varepsilon I_n > 0$, и

$$M(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(2^k z)}{2^k} C_k, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{13}$$

Элементарно показывается, что $M(\cdot) \in R[\mathbb{C}^n]$ и $0 \in \rho(M(i))$. Поэтому найдётся симметрический оператор A в $\mathfrak{H}$, $n_{\pm}(A) = n$, и граничная тройка $\Pi = \{\mathbb{C}^n, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* такая, что соответствующая функция Вейля совпадает с $M(\cdot)$ (см. [4]). В силу (13) спектр оператора A_0 чисто точечный, кратности $N_{A_0}^p = n$, $\sigma_{pp}(A_0) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{j \in Z} 2^{-k} \pi \left(\frac{1}{2} + j \right)$ и $\sigma_{ac}(A_0) = \sigma_{sc}(A_0) = \phi$, но по теореме 4 для всех $B = B^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\sigma_{sc}(A_B) = \mathbb{R}, \quad N_{A_B}^{sc}(t) = n, \quad t \in S'_{sc}(\Sigma_B),$$

но

$$\sigma_{ac}(A_B) = \sigma_p(A_B) = \phi.$$

7. Сингулярный спектр расширений прямых сумм. Обобщение теоремы И. С. Каца.

Теорема 6. *Пусть* $A^{(1)}$ *и* $A^{(2)}$ *— простые симметрические операторы в* $\mathfrak{H}_1$ *и* $\mathfrak{H}_2$, $n_{\pm}(A^{(j)}) = n_j < \infty$, $j \in \{1, 2\}$, *и* $A := A^{(1)} \oplus A^{(2)}$. *Пусть далее* $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^j, \Gamma_1^j\}$ *— граничная тройка для* $(A^{(j)})^*$, $j \in \{1, 2\}$, *и* $\Pi := \Pi_1 \oplus \Pi_2 = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$. *Если матрица* $B = B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *не является блочно-диагональной относительно разложения* $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, *то кратность сингулярного спектра оператора* $A_B (= A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_1 - B\Gamma_0))$ *не превосходит* $n_1 + n_2 - 1$, *т.е.* $N_{A_B^s}(t) \leq n_1 + n_2 - 1$ *для* $E_{A_B}^s$*-п.в.* t.

Предложение 3. *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 6 $n_{\pm}(A^{(j)}) = n, j \in \{1, 2\}$. *Пусть далее* $\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \operatorname{Ext}_A$,

$$\operatorname{dom}(\tilde{A}) = \{\hat{f} = f_1 \oplus f_2 \in \operatorname{dom} A^*: \Gamma_0^1 f_1 = \Gamma_0^2 f_2, \; \Gamma_1^1 f_1 = -\Gamma_1^2 f_2\}, \tag{14}$$

M_j *— функция Вейля, соответствующая тройке* $\Pi_j = \{\mathcal{H}_j, \Gamma_0^j, \Gamma_1^j\}$, *и* $\Sigma_j = \Sigma_{M_j}$ *— её представляющая мера из* (4), $j \in \{1, 2\}$. *Тогда*:

(i) $N_{E^s_{\tilde A}}(t) \le 2n - 1$ *для* $E^s_{\tilde A}$-*п.в.* $t \in \mathbb{R}$;

(ii) *если* $x_0 \in S'_{ac}(\Sigma_1; n)$ *и* $x_0 \in \sigma_s(\tilde A)$, *то* $N_{E^s_{\tilde A}}(x_0) \le$ $\le n$.

П р и м е р 4. Пусть $Q(\cdot) = Q^*(\cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{C}^{n\times n})$. Обозначим $A_\pm$ операторы, порождённые в $L^2(\mathbb{R}_\pm, \mathbb{C}^n)$ операцией $A = -D^2 + Q(\cdot)$, и $A := A_+ \oplus A_-$. Пусть $n_\pm(A_+) = n_\pm(A_-) = n$ и $\Pi_\pm = \{\mathbb{C}^n, \Gamma_0^\pm, \Gamma_1^\pm\}$, — тройки для $A_\pm^*$ вида

$$\begin{gathered}\Gamma_0^+ u = u(+0),\ \Gamma_1^+ u = u'(+0),\\ \Gamma_0^- v = v'(-0),\ \Gamma_1^- v = v(-0).\end{gathered} \tag{15}$$

Тогда $\Pi_+ \oplus \Pi_-$ — граничная тройка для A^*. Пусть A_B — расширение с недиагональной матрицей $B = B^* \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$. В силу теоремы 6 $N_{\Sigma^s_B}(t) \le 2n - 1$ для ρ_s-п.в. $t \in \mathbb{R}$. В частности, это так для "свободного" оператора Шрёдингера $-D^2 + Q$ на оси, совпадающего с A_B при $B = \text{codiag}(I_n, I_n)$. При этом $N_{\tilde A^s}(t) \le n$ для $t \in S'_{ac}(\Sigma_+; n)$.

При $n = 1$ оценка $N_{\tilde A^s}(t) \le 1$ для ρ_s-п.в. $t \in \mathbb{R}$ составляет содержание теоремы И.С. Каца [7]. Аналогично рассматриваются квантовые графы, недавно изученные в [15].

Отметим в заключение недавнюю работу [9], в которой также изучаются спектры n-мерных возмущений самосопряжённых операторов.

Источник финансирования. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aronszajn N.* // Amer. J. Math. 1957. V. 79. P. 597–610.
2. *Brasche J.*, *Malamud M.*, *Neidhardt H.* // Int. Eq. Oper. Theory. 2002. V. 43. № 3. P. 264–289.
3. *Горбачук В.И.*, *Горбачук М.Л.* Граничные задачи для операторных дифференциальных уравнений. Киев: Наук. думка, 1984.
4. *Derkach V.A.*, *Malamud M.M.* // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 1–95.
5. *Derkach V.A.*, *Hassi S.*, *Malamud M.M.*, *de Snoo H.* // Meth. Funct. Anal. Topology. 2000. V. 6. № 3. P. 45–65.
6. *Donoghue W.* // Communs Pure Appl. Math. 1965. V. 18. P. 559–576.
7. *Кац И.С.* // Изв. АН СССР. 1963. Т. 27. № 5. С. 1081–1112.
8. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer Verlag, 1966.
9. *Liaw C.*, *Treil S.* // Matrix Measures and Finite Rank Perturbations of Selfadjoint Operators. arXiv:1806.08856v1, [Math.SP], 2018
10. *Маламуд М.М.*, *Маламуд С.М.* // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 3. С. 1–77.
11. *Malamud M.M.*, *Neidhardt H.* // J. Funct. Anal. 2011. V. 260. № 3. P. 613–638.
12. *Reed M.*, *Simon B.* // Methods of Modern Mathematical Physics. II. Functional Analysis. 2nd ed. N.Y.: Acad. Press, 1980.
13. *Рофе-Бекетов Ф.С.* // Мат. сб. 1960. Т. 51. № 3. С. 293–342.
14. *Simon B.*, *Wolff T.* // Communs Pure Appl. Math. 1986. V. 39. P. 75–90.
15. *Simonov S.*, *Worachek N.* // Integr. Equat. Oper. Theory. 2014. V. 78. № 4. P. 523–575.

ON SINGULAR SPECTRUM OF FINITE DIMENSIONAL PERTURBATIONS (TO THE ARONSZAJN—DONOGHUE—KAC THEORY)

M. M. Malamud

Peoples' Friendship University of Russia, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov December 24, 2018

Received December 26, 2018

The main results of the Aronszajn—Donoghue—Kac theory are extended to the case of n-dimensional (in the resolvent sense) perturbations $\tilde A$ of an operator $A_0 = A_0^*$ defined on a Hilbert space $\mathfrak{H}$. Applying technique of boundary triplets we describe singular continuous and point spectra of extensions A_B of a symmetric operator A acting in $\mathfrak{H}$ in terms of the Weyl function $M(\cdot)$ of the pair $\{A, A_0\}$ and boundary n-dimensional operator $B = B^*$. Assuming that the multiplicity of singular spectrum of A_0 is maximal it is established orthogonality of singular parts $E^s_{A_B}$ and $E^s_{A_0}$ of the spectral measures E_{A_B} and E_{A_0} of the operators A_B and A_0, respectively. It is shown that the multiplicity of singular spectrum of special extensions of direct sums $A = A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ cannot be maximal as distinguished from multiplicity of the absolutely continuous spectrum. In particular, it is obtained a generalization of the Kac theorem on multiplicity of singular spectrum of Schrodinger operator on the line as well as its clarification. The multiplicity of singular spectrum of special extensions of direct sums $A = A^{(1)} \oplus A^{(2)}$ are investigated. In particular, it is shown that it cannot be maximal as distinguished from multiplicity of the absolutely continuous spectrum. This result generalizes the Kac theorem on multiplicity of singular spectrum of Schrodinger operator on the line and clarifies it.

Keywords: finite dimensional perturbations, singular spectrum, point spectrum, multiplicity of spectrum.