

УДК 532

ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ
В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ ГИДРОУПРУГОЙ МОДЕЛИС. Ю. Доброхотов^{1,2}, Х. Х. Ильясов^{1,*},
С. Я. Секерж-Зенькович¹, О. Л. Толстова^{2,3,**}

Представлено академиком РАН Д. М. Климовым 13.02.2019 г.

Поступило 20.02.2019 г.

Рассмотрена задача о возбуждении волн на поверхности слоя воды, расположенного на упругом основании. Предполагается, что источник возбуждения располагается внутри упругого полупространства. Используется подход Г.С. Подъяпольского, основанный на изучении решений совместной линейной системы уравнений теории упругости в полупространстве и теории волн в жидкости, связанных на границе раздела соответствующими граничными условиями. На основе полученного ранее упрощённого дисперсионного соотношения для водяной моды, учитывающего влияние упругого основания, выведена простая интегральная формула, связывающая начальное возмущение специального вида в упругом полупространстве и амплитуду волны на поверхности воды, порождённой этим источником. Проведено сравнение получаемых решений с решениями, основанными на известной поршневой модели возбуждения длинных волн.

Ключевые слова: упругое полупространство, слой жидкости, поверхностные волны, задача Коши, возмущение свободной поверхности.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524874370-375>

В работе рассматривается задача о возбуждении волн на поверхности слоя жидкости, расположенного на упругом основании. Предполагается, что источник возбуждения располагается внутри упругого полупространства.

Можно выделить по крайней мере два подхода к решению данной задачи. Один из них состоит в первоначальном изучении распространения возмущений в упругом полупространстве, приводящем к изменению (подвижке) дна бассейна (в районе, расположенном над источником). Подвижка дна приводит к смещению водяного столба в районе над источником, далее в модель включается водяной слой: на поверхности воды появляется возмущение, что приводит к образованию поверхностных гравитационных волн. Если иметь в виду длинные волны в океане — волны цунами, то это означает использование на втором этапе известной поршневой мо-

дели возникновения и распространения волн. Такой подход использован, например, в работах [1–3].

Другой подход, по-видимому, впервые предложенный и частично реализованный Г.С. Подъяпольским [4], а также использованный другими учёными [5–10], состоит в изучении решений совместной системы уравнений теории упругости в полупространстве (коре) и теории волн в жидкости, связанных на границе раздела соответствующими граничными условиями. Волновые процессы в такой системе складываются из волн (мод), которые в предельных случаях переходят в продольные и поперечные волны в упругом основании, поверхностные волны Рэлея и поверхностные волны на воде. При этом все моды имеют компоненты и на поверхности жидкости и границе раздела, а также и внутри упругого полупространства. В начальный момент времени и при малых временах все эти моды оказывают влияние на возмущение свободной поверхности жидкости, но скорости распространения, соответствующие “упругим” модам, сильно отличаются от скорости распространения “водяной” моды. Например, скорость “упругих волн” для базальта (гранита) соответственно такие: продольная $c_l \approx 22\,680$ км/ч (19 800 км/ч), поперечная $c_t \approx 12\,600$ км/ч (10 080 км/ч), и если предполагать, что глубина бассейна D находится в пределах 2–5 км, то скорость распространения длинных волн в слое

¹ Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской Академии наук, Москва

² Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Долгопрудный Московской обл.

³ Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской Академии наук, Москва

*E-mail: ilyasov@ipmnet.ru

**E-mail: olga111@rambler.ru

жидкости $v = \sqrt{gD}$ ($g \approx 0,01$ км/с² — ускорение свободной поверхности) находится в пределах 500–800 км/ч. Поэтому через небольшое время на поверхности воды остаётся “водяная” мода, и вопросы, касающиеся эволюции свободной поверхности, можно изучать, учитывая только её, что и делается в этой работе. Основной результат работы — относительно простая интегральная формула для решения.

1. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Идеальная невязхёрная жидкость описывается потенциалом перемещений $\Psi(x, z, t)$, деформации упругого полупространства — вектором смещений $U(x, z, t) = (u_1, u_2, u_3)$, где $x \in \mathbb{R}^2$ — горизонтальные, z — вертикальная координаты. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущённой поверхностью жидкости, а граница раздела слоёв задаётся уравнением $z = -D$. Значения U и Ψ определяются из следующей системы уравнений и граничных условий (в упругой среде — уравнения Ламе, в жидком слое — уравнение Лапласа):

$$c_t^2 \nabla^2 U + (c_l^2 - c_t^2) \nabla \operatorname{div} U = U_{tt}, \\ z < -D, \quad \nabla^2 \Psi = 0, \quad -D < z < 0,$$

на невозмущённой поверхности жидкости $z = 0$:

$$\Psi_{tt} + g \Psi_z = 0,$$

на границе раздела $z = -D$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = u_3, \\ (c_l^2 - c_t^2) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2c_t^2 \frac{\partial u_3}{\partial z} = \\ = \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + (\rho - 1)u_3$$

и $U \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Здесь $c = c_l$ и c_t — скорости продольной и поперечных волн в упругой среде, $\rho = \rho_w/\rho_e$ — отношение плотностей жидкости и упругой среды (для базальта (гранита) соответственно $\rho_e \approx 3000$ кг/м³ (2600 кг/м³)). Приблизительно можно считать, что $\rho \approx 1/3$; $v/c_l \approx 0,035$; $v/c_t \approx 0,063$; $c = c_l/c_t \approx 1/\sqrt{3}$. Параметры начальных возмущений обсудим позже.

Наиболее интересный объект с точки зрения приложений к волнам на воде — это превышение свободной поверхности η ; если решения U, Ψ получены, то η восстанавливается по формуле

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Система для U, Ψ имеет нестандартную с точки зрения уравнений в частных производных форму. Но, используя операторный подход, её можно представить в виде стандартной задачи Коши [8, 9]

$$Y_{tt} = \hat{L}Y, \quad Y|_{t=0} = Y_0(x, z), \quad Y_t|_{t=0} = Y_1(x, z), \quad (2)$$

где $\hat{L} = L \left(i \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ — матричный дифференциальный оператор по переменным (x, z) , формулы для него приведены в [8]. Физическое пространство, в котором заданы функции Y и функции Y_0, Y_1 , состоит из упругого полупространства $z < -D$ и двух плоскостей $z = 0$ и $z = -D$. Вектор-функция $Y = (u_1, u_2, u_3, \psi_w, \psi_D)^T$ состоит из пяти компонент: три $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ зависят от x, z, t , а две $\psi(x, t) = (\psi_w, \psi_D)^T$, $\psi_w = \Psi(x, z, t)|_{z=0}$, $\psi_D = \Psi(x, z, t)|_{z=-D}$ зависят только от x, t . Здесь и ниже индекс T означает транспонирование. Энергетическая норма в пространстве решений определяется скалярным произведением вида

$$(Y^1, Y^2) = \int_{\mathbb{R}_x^2} \int_{-\infty}^{-D} \langle \bar{U}^1, U^2 \rangle dz dx + \\ + \rho \int_{\mathbb{R}_p^2} \langle \bar{\Psi}(p, t), R(p) \tilde{\Psi}(p, t) \rangle dp, \\ R = \begin{pmatrix} |p| \operatorname{cth}(|p|D) & -|p|/\operatorname{sh}(|p|D) \\ |p|/\operatorname{sh}(|p|D) & -|p| \operatorname{cth}(|p|D) \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает евклидово вещественное произведение векторов, черта — комплексное сопряжение и тильда — преобразование Фурье по горизонтальным переменным (x_1, x_2) (двойственные переменные мы обозначаем (p_1, p_2)).

Исследование существования и единственности решения задачи Коши для жидкости произвольной (включая случай переменной) глубины проведено в работах [8, 9]. Рассмотрим специальную задачу Коши с начальными условиями специального вида $(x = 0, z_0), z_0 < 0$:

$$U|_{t=0} = U^0(x, z), \quad \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \\ \Psi_{w,D}|_{t=0} = \frac{\partial \Psi_{w,D}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (3)$$

считая, что начальные возмущения имеются только у перемещений в упругом основании, причём они локализованы в его глубине так, что вектор-функция $U^0(x, z)$ быстро убывает при отдалении от точки. Более того, для получения эффективных формул для решения мы выберем $U^0(x, z)$ в виде

$$U^0(x, z) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}(z) V(x) e^{\frac{(z-z_0)^2}{2b_3^2}}, \quad (4)$$

$$V(x) = \left(1 + \left(\frac{x_1}{b_1} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{b_2} \right)^2 \right)^{-3/2},$$

где \mathbf{a} — трёхмерный вектор-столбец амплитуд с компонентами (a_1, a_2, a_v) , $\mathbf{e}(z)$ — гладкая “срезающая функция”, равная единице при $z < -D - 2\delta$ и принимающая нулевые значения при $z > -D - \delta$ (на ответ она не влияет и введена для математической строгости). Параметры a_j, a_v, b_k — размерные (км) константы, характеризующие амплитуды перемещений и их размер в источнике.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ПО МОДАМ И ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Поскольку $D = \text{const}$, можно применить преобразование Фурье по переменным (x_1, x_2) , и согласно общей теории решение задачи сведётся к исследованию спектра оператора $L\left(p, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, где $p = (p_1, p_2)$ — двойственные к x_1, x_2 переменные. При каждом фиксированном p оператор $L\left(p, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ действует на элементы $\tilde{Y} = (\tilde{U}(z, p), \tilde{\Psi}(p))^T$. Спектр оператора $L\left(p, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (обозначаем спектральный параметр λ , он соответствует $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$) устроен следующим образом [8, 9].

При $\lambda < p^2 c_t^2$ существуют две точки дискретного спектра (называемые для краткости водяной модой и модой Рэлея) $\lambda_W = \omega^2(|p|)$, $\lambda_R = \omega_R^2(|p|)$ и отвечающие им собственные функции $\tilde{Y}_{W,R}(p, z)$, соответствующие в предельных случаях $p = 0, D = 0$ поверх-

ностным волнам в жидкости и волнам Рэлея в упругом полупространстве. Значения $\lambda_{W,R} \geq 0$ находятся из дисперсионного соотношения

$$(\lambda - g|p| \text{th}(|p|D)) \times$$

$$\times \left(-4p^2 k_t k_l + (k_t^2 + p^2)^2 - \frac{\lambda g(p-1)k_l}{c_t^4} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2 p k_l}{c_t^4} (g|p| - \lambda \text{th}(|p|D)) = 0, \quad (5)$$

$$k_t = \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{c_t^2}}, \quad k_l = \sqrt{p^2 - \frac{\lambda}{c_l^2}}.$$

При этом имеется такое значение P_R , что волны Рэлея появляются, только если $|p| > P_R$ (кривая $\lambda_R = \omega_R^2(|p|)$ “отщепляется” от границы непрерывного спектра, см. [11]).

При $\lambda \geq p^2 c_t^2$ спектр становится непрерывным. Когда $p^2 c_t^2 \leq \lambda \leq p^2 c_l^2$, имеется двумерное подпространство обобщённых собственных функций с базисом $\tilde{Y}_t^1(p, k, z), \tilde{Y}_t^2(p, k, z)$, отвечающих “упругим” поперечным волнам, а, когда $\lambda > p^2 c_l^2$, в дополнение к ним появляются функции $\tilde{Y}_l^1(p, k, z)$, отвечающие “упругим” продольным волнам и характеризующиеся дополнительным параметром $k > 0$.

Для полноты изложения приведём на рис. 1а схематическое изображение спектра из [11], представив его для наглядности в координатах $|p|$ и $v^2 = \lambda/p^2$. Горизонтальная прямая $v^2 = c_t^2$ определяет нижнюю границу непрерывного спектра, прямая $v^2 = c_l^2$ определяет значение, при переходе через которое двукратно вырожденный спектр становится трёхкратно вырожденным. Кривые $v^2 = \omega_{W,R}^2(|p|)/p^2$ определяют точки дискретного спектра — водяную моду и моду Рэлея.

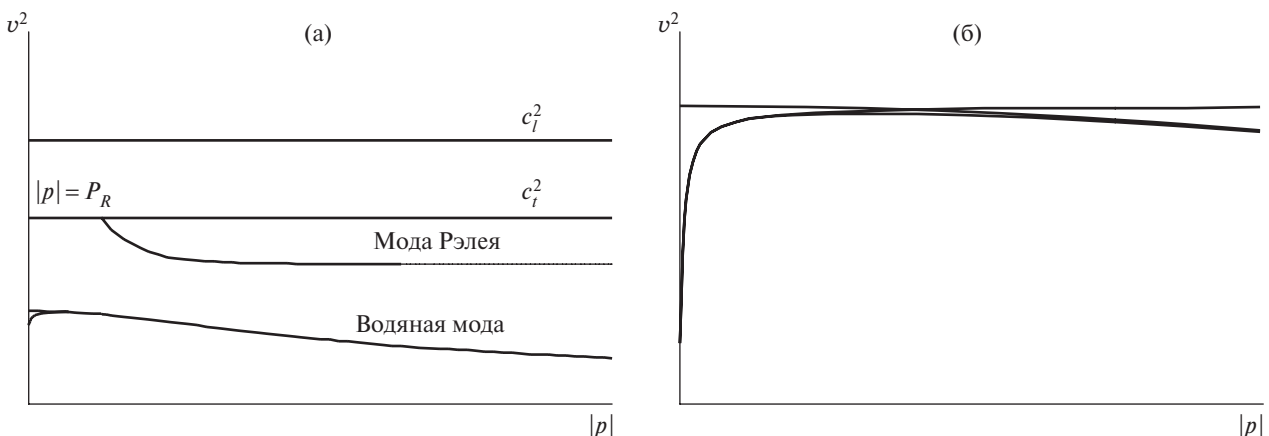


Рис. 1. Схематичное изображение спектра задачи (а) и дисперсионные кривые для водяной моды (б).

Согласно общей теории решение задачи (2) можно представить в виде разложения по собственным функциям оператора \hat{L} (см. [8, 9])

$$\begin{aligned} \Upsilon = \sum_{\pm} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle p, x \rangle} \left[e^{\pm i t \omega_W(|p|)t} C_W^{\pm} \tilde{\Upsilon}_W(p, z) + \right. \right. \\ \left. + e^{\pm i t \omega_R(|p|)t} C_R^{\pm} \tilde{\Upsilon}_R(p, z) + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \left(e^{\pm i t \omega_l(p, k)} \sum_{m=1}^2 C_l^{\pm, m} \tilde{\Upsilon}_l^m(p, k, z) + \right. \right. \\ \left. \left. + e^{\pm i t \omega_l(p, k)} C_l^{\pm} \tilde{\Upsilon}_l(p, k, z) \right) dk \right] dp \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где коэффициенты Фурье $C_W^{\pm}(p)$, $C_R^{\pm}(p)$, $C_l^{\pm, 1}(p, k)$, $C_l^{\pm, 2}(p, k)$, $C_l^{\pm}(p, k)$ находятся из разложения (6) при $t = 0$ начальных условий.

В силу сказанного выше в этой сумме значимыми и интересными оказываются слагаемые, содержащие только $\tilde{\Upsilon}_W(p, z)$, учитывающие водяную моду, отвечающую корню λ_W соотношения (5). Собственная вектор-функция $\tilde{\Upsilon}_W(p, z) = (\chi(p, z), \zeta_W(p), \zeta_D(p))$ ($\chi(p, z)$ соответствует \tilde{U} , а $\zeta = (\zeta_W(p), \zeta_D(p))$ соответствуют $(\tilde{\Psi}_W, \tilde{\Psi}_D)$) имеет вид

$$\chi = A \left(\begin{pmatrix} p k_t \\ -i p^2 \end{pmatrix} e^{k_t(z+D)} + \frac{k_t^2 + p^2}{2k_l} \begin{pmatrix} -p \\ i k_l \end{pmatrix} e^{k_t(z+D)} \right),$$

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_W = -i A g \lambda_W / (2c_t^2 \operatorname{ch}(|p|D) (\lambda_W - g|p| \operatorname{th}(|p|D))),$$

$$\zeta_D = \zeta_W (1 - \lambda_W \operatorname{th}(|p|D) / g|p|),$$

где нормировочный коэффициент A , определяемый

$$\text{из равенства } \int_{-D}^0 \langle \bar{\chi}, \chi \rangle dz + \langle \bar{\zeta}, R(p)\zeta \rangle = 1,$$

$$\begin{aligned} A = & \left(\frac{p^2(k_t^2 + p^2)}{2k_t} + \frac{(k_t^2 + p^2)^2(k_t^2 + p^2)}{8k_l^3} - \right. \\ & - \frac{p^2(k_t^2 + p^2)}{k_l} + \frac{\rho \lambda_W^2 |p| \operatorname{th}(|p|D)}{4c_t^4 (\lambda_W - g|p| \operatorname{th}(|p|D))^2} \times \\ & \left. \times \left(g^2 - 2g \frac{\lambda_W}{|p|} \operatorname{th}(|p|D) + \frac{\lambda_W^2}{p^2} \right) \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

и $\lambda_W = \omega^2(|p|)$ определено в (5). Используя приведённые формулы и (1), получим превышение η , порождённое возмущением вида (3):

$$\eta = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\pm} \int_{\mathbb{R}_p^2} e^{i(\langle p, x \rangle \pm t \omega(|p|))} \times$$

$$\times \frac{i \omega^4 C_W(p) A}{2c_t^2 \operatorname{ch}(|p|D) (\lambda_W(|p|) - g|p| \operatorname{th}(|p|D))} dp,$$

$$C_W(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-D} \bar{\chi}(p, z) \left(\int_{\mathbb{R}_x^2} e^{-i\langle p, x \rangle} U^0(x, z) dx \right) dz. \quad (7)$$

3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ИСТОЧНИКОМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА И ИХ УПРОЩЕНИЕ

Выберем начальное возмущение U^0 в виде (4). Преобразование Фурье от функции $V(x)$ (см., например, [12]) $\tilde{V} = b_1 b_2 e^{-|p| \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}}$, где ψ — угол вектора p в полярных координатах. Вычисление интеграла (7) сводится к вычислению интегралов

$$F_{1,2} = \int_{-\infty}^{-D} \mathbf{e}(z) e^{k_{t,l}(z-z_0)} e^{\frac{-(z-z_0)^2}{2b_3^2}} dz. \text{ Мы будем предпо-}$$

лагать, что источник возбуждения волны расположен достаточно глубоко, а его вертикальные размеры невелики, так что $|z_0| - D$ сильно превышает b_3 (например, больше $3b_3$); тогда для вычисления интеграла можно применить метод Лапласа, что даёт

$$\begin{aligned} C_W = & -i A b_1 b_2 e^{-|p| \mathbf{b}(\psi)} ((i k_t \langle p, a \rangle - p^2 a_v) e^{k_t(z_0+D)} F_t + \\ & + \frac{k_t^2 + p^2}{2k_l} (-i \langle p, a \rangle + k_l a_v) e^{k_l(z_0+D)} F_l), \end{aligned}$$

$$F_{t,l} \approx b_3 \sqrt{2\pi} e^{\frac{b_3^2 k_{t,l}^2}{2}} \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 k_{t,l}),$$

$$\mathbf{b}(\psi) = \sqrt{b_1^2 \cos^2 \psi + b_2^2 \sin^2 \psi}, \quad \langle p, a \rangle = p_1 a_1 + p_2 a_2.$$

Критическая роль в упрощениях приведённых формул связана с нетривиальным вопросом о нахождении простой приближённой формулы для $\lambda_W = \omega^2(|p|)$ для водяной моды. Приближённое выражение для λ_W удалось получить недавно (см. [11]) с помощью программы Mathematica [14], и фактически оно основано на учёте (относительной) малости выражений $\frac{gD}{c_t^2} \approx 10^{-4}$, $\frac{c_t^2}{c_l^2} \approx \frac{1}{3}$. Это упрощённое выражение имеет вид

$$\lambda_W \equiv \omega^2 \approx g \left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_t^2 |p|} \right) |p| \operatorname{th}(D|p|). \quad (8)$$

График $v_W^2 = \lambda_W(|p|)/|p|^2$ (из [11]) представлен на рис. 16. Слева от точки слияния $|p| \approx 0,3$ кривая сверху изображает стандартное для поверхностных волн соотношение с $\rho = 0$, ниже изображены кривая

v_W^2 и практически совпадающая с ней её длинноволновая аппроксимация ($\text{th}(D|p|)$ заменяется на $|p|D$). За точкой слияния верхняя кривая изображает длинноволновую аппроксимацию v_W^2 , нижняя — v_W^2 и практически совпадающее с ней стандартное соотношение с $\rho = 0$. Отличие от стандартного для поверхностных волн соотношения (с $\rho = 0$) этой кривой имеет место только для малых $|p|$ (очень длинных волн, с длиной волны ~ 200 км), и скорость распространения переднего фронта длинных волн если и зависит от свойств упругого основания, то только для очень больших длин волн ($l \sim 150$ км). Замена функции λ_W на её квадратичную по $|p|$ часть работает только в очень маленькой окрестности $p = 0$, поэтому основанный на этой замене вывод Г.С. Подъяпольского [4] о значительном изменении скорости длинных волн (на 15%) оказывается несправедливым (см. [11]).

Теперь воспользуемся (8) и малостью величин $\frac{gD}{c_i^2}, \frac{c_i^2}{c_i^2}$ и заменим k_i на $|p|\left(1 - \frac{\omega^2}{2c_i^2|p|^2}\right)$, тогда последние упрощения (7) (проведённые с помощью программы Mathematica) приводят к равенству

$$\eta \approx \frac{b_1 b_2 b_3 g}{4\sqrt{2\pi} c_i^2} \times \text{Re} \int_{\mathbb{R}^2_p} \frac{e^{i(\langle p, x \rangle + t\omega(|p|))} e^{-|p|b(\psi)} (1 - \rho + 2|p|c_i^2/g)^2 \text{sh}(D|p|)}{p^2 (1 + 2|p|c_i^2/g) (\rho \text{ch}^2(D|p|) + \text{th}(D|p|))} \times \frac{e^{|p|(z_0 + D)} e^{-\frac{b_3^2 p^2}{2}} \lambda_W (a_v |p|(c_i^2 - R) + i\langle p, a \rangle (c_i^2 + R)) \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 |p|) dp}{|p| 2c_i^2 c_i^2}, \quad (9)$$

где $R = (c_i^2 - c_i^2)|p|(D + b_3^2|p| + z_0)$. Изучим этот интеграл при больших $|x|$ (в приближении дальнего поля). Пусть φ — полярный угол вектора x и ψ — полярный угол вектора p , $\langle p, x \rangle = |x|\rho \cos(\psi - \varphi)$, $\rho = |p|$. Перейдём в интегрировании к координатам (ρ, ψ) и с учётом оценки $|x| \gg 1$ применим метод стационарной фазы по ψ . Это даст множитель $e^{i(\pm|x|\rho - t\omega(\rho))}$. Так как $\partial\omega/\partial\rho > 0$, то согласно [13] при $t > 0$ слагаемое с $-(|x|\rho - t\omega(\rho))$ вносит вклад в асимптотику $O(|x|^{-2})$ и им можно пренебречь. В результате получим $\eta \approx \eta_F$:

$$\eta_F = \frac{b_1 b_2 b_3 g^2}{8\pi c_i^2 c_i^2 \sqrt{|x|}} \times \text{Re} \int_0^\infty \frac{e^{-\rho(b(\psi) - z_0 - D)} (1 - \rho + 2\rho c_i^2/g)^3 \text{sh}^2(D\rho)}{\sqrt{\rho} (1 + 2\rho c_i^2/g)^2 (\rho \text{ch}^3(D\rho) + \text{sh}(D\rho))} \times \frac{b_3^2 \rho^2}{2} (a_v (c_i^2 - R) + i a_h(\varphi)(1 + R)) \mathbf{e}(z_0 + b_3^2 \rho) e^{i(|x|\rho - t\omega(\rho) - \pi/4)} d\rho,$$

где $R = (c_i^2 - 1)\rho(D + b_3^2\rho + z_0)$, $c = c_i/c_i$, $a_h(\varphi) = a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi$. “Срезающую функцию” $\mathbf{e}(z_0 + b_3^2 \rho)$ можно выбрать быстро убывающей при положительных z , например в виде $\mathbf{e}(y) = 1/(1 + \exp((y/b_3 + 2)^3))$. Эта формула становится более простой в длинноволновом приближении, тогда $|p|D$ предполагается достаточно малым и $b_j + |z_0| \gg D$, и можно написать $\text{sh}(D\rho) \approx D\rho$, $\text{ch}^2(D\rho) \approx 1$, $\omega \approx \tilde{\omega} = |p| \times \sqrt{gD \left(1 - \frac{g\rho}{g + 2c_i^2|p|^2}\right)}$.

Обратим внимание на множитель $e^{-\rho(b(\psi) - z_0 - D)}$, который определяет форму “эффективного источ-

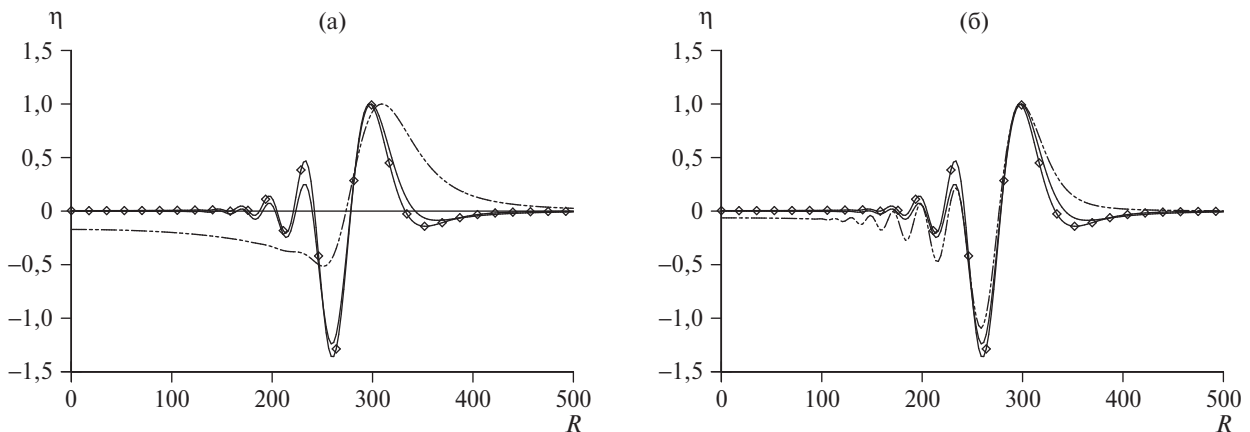


Рис. 2. Результаты расчётов η , η_F с параметрами $b = 2$, $t = 60$, $|z_0| = 43$, $D = 3$ в сравнении с возвышением, полученным по поршневой осесимметричной модели с $l = 40$ (а) и $l = 15$ (б).

ника” на свободной поверхности жидкости, генерирующего распространяющиеся волны. В симметричном случае $b_1 = b_2 = b$ выражение $\mathbf{b}(\psi) - z_0 - D = b + |z_0 - D|$ приблизительно задаёт характерный размер этого “эффективного источника” и складывается тем самым из характерного горизонтального размера b подземного источника и глубины $|z_0 - D|$ залегания его центра. Этот результат, конечно, выглядит очень естественно, интересно то, что он явным образом содержится в выведенной формуле.

Приведём некоторые результаты численной реализации “пространственных профилей” волн (при постоянном t), описываемых формулой (9) и формулой для η_L в случае осесимметричного источника $b_1 = b_2 = b_3 \equiv b$, действующего в вертикальном направлении $a_1 = a_2 = 0$ в сравнении с профилями из работы [11], проведёнными в рамках поршневой модели возбуждения длинных волн (в этом случае множитель после осциллирующей экспоненты в последнем интеграле равен $a\sqrt{\rho e^{-\rho l}}$) (рис. 2).

Амплитуда a подобрана таким образом, чтобы максимумы соответствующих решений совпадали и были равны единице. Время считалось постоянным, т.е. вычислялись “волновые профили”. Расчёты по формуле (9) показаны сплошной линией, маркированная линия — расчёты по формуле η_F , расчёты по формулам из [11] показаны штрихпунктирной кривой. Видно, что учёт влияния упругости дна снижает амплитуды осцилляций волнового профиля в зависимости от расстояния от головного гребня волны и приводит к явному понижению уровня жидкости перед ним.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17–01–00644).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: Ин-т прикладной физики РАН, 1996.
2. Kanamori H. // Phys. Earth and Planet. Inter. 1972. № 6. P. 349–359.
3. Yamashita T., Sato R. // J. Phys. Earth. 1974. № 22. P. 415–440.
4. Подъяпольский Г.С. В сб.: Методы расчета возникновения и распространения цунами. М.: Наука, 1978.
5. Sabatier P.C. // J. Fluid Mech. 1983. V. 126. P. 27–58.
6. Гусяков В.К., Чубаров Л.Б. // Изв. РАН. Физика Земли. 1987. В. 11. С. 53–64.
7. Фрагела А.К. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. В. 8. С. 1417–1426.
8. Доброхотов С.Ю., Толстова О.Л., Чудинович И.Ю. // Мат. заметки. 1993. Т. 54. В. 3. С. 33–55.
9. Гринив Р.О., Доброхотов С.Ю., Шкаликов А.А. // Мат. заметки. 2000. Т. 68. В. 1. С. 57–70.
10. Зволинский Н.В., Карпов И.И., Никитин И.С., Сежер-Зенькович С.Я. // Изв. РАН. Физика Земли. 1994. В. 9. С. 29–33.
11. Dobrokhoto S.Yu., Tolstova O.L., Sekerzh-Zenkovich S.Ya., Vargas C.A. // Russ. J. Math. Phys. 2018. V. 25. № 4. P. 459–469.
12. Dobrokhoto S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B. // Russ. J. Math. Phys. 2010. V. 17. № 1. P. 66–76.
13. Федорюк М.В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.
14. Wolfram Mathematica. www.wolfram.com/mathematica/

SIMPLE SOLUTIONS TO THE WAVE PROBLEM ON THE SURFACE OF A FLUID WITH THE LINEAR HYDROELASTIC MODEL

S. Yu. Dobrokhoto^{1,2}, Kh. Kh. Il'yasov¹, S. Ya. Sekerzh-Zen'kovich¹, O. L. Tolstova^{2,3}

¹Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

²Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation

³Steklov Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS D.M. Klimov February 13, 2019

Received February 20, 2019

The problem of generation of waves on the surface of a water layer placed on an elastic base is considered. It is assumed that the generating source is located inside the elastic half-space. The Podypolskii approach is used which is based on study of the solutions to the common linear system of equations of the theory of elasticity in the half-space and the theory of water waves linked at the interface by the corresponding boundary conditions. The previously obtained simplified dispersion relation for the water mode with account for the elastic base effect is used to derive a simple integral formula which associates the initial perturbation of a special kind in the elastic half-space and the amplitude of the surface water waves generated by this source. The obtained solutions are compared with the solutions based on the well-known piston model of long wave generation.

Keywords: elastic half-space, liquid layer, surface waves, Cauchy problem, elevation of the free surface.