

УДК 532.5.031, 517.938.5

## О БИФУРКАЦИИ ЧЕТЫРЁХ ТОРОВ ЛИУВИЛЛЯ В ОДНОЙ ОБОБЩЁННОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ МОДЕЛИ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ

П. Е. Рябов

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 28.03.2019 г.

Поступило 29.03.2019 г.

Рассматривается обобщённая математическая модель динамики двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармоническую ловушку, и динамики двух точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью. В случае положительной вихревой пары, представляющей интерес для физических экспериментальных приложений, получена новая бифуркационная диаграмма, для которой показано наличие бифуркации четырёх торов в один. Бифуркации трёх и четырёх торов в интегрируемой обобщённой модели вихревой динамики с положительными интенсивностями свидетельствуют о сложном переходе и связи бифуркационных диаграмм обоих предельных случаев. Аналитические результаты данной публикации (бифуркационная диаграмма, сведение к системе с одной степенью свободы, анализ устойчивости) составляют основу компьютерного моделирования абсолютной динамики вихрей в фиксированной системе координат при произвольных значениях физических параметров модели (интенсивностей, параметра вихревого взаимодействия и др.).

*Ключевые слова:* вполне интегрируемые гамильтоновы системы, бифуркационная диаграмма отображения момента, бифуркации торов Лиувилля, динамика вихрей, бозе-эйнштейновский конденсат.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524874376-380>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Обобщённая математическая модель динамики двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармонической ловушке, и динамики двух точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью, описывается системой дифференциальных уравнений, которая может быть представлена в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \Gamma_k \dot{x}_k &= \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2); \\ \Gamma_k \dot{y}_k &= -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где гамильтониан  $H$  имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left[ \Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) + \right. \\ &\left. + \Gamma_1 \Gamma_2 \ln \left( \frac{[|z_1 - z_2|^2 + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)]^\epsilon}{|z_1 - z_2|^{2(c+\epsilon)}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Финансовый университет  
при Правительстве Российской Федерации, Москва  
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова  
Российской Академии наук, Москва  
Удмуртский государственный университет,  
Ижевск  
E-mail: [perjabov@fa.ru](mailto:perjabov@fa.ru)

Здесь через  $z_k = x_k + iy_k$  обозначены декартовы координаты  $k$ -го вихря ( $k = 1, 2$ ) с интенсивностями  $\Gamma_k$ . Физический параметр “ $c$ ” выражает меру вихревого взаимодействия,  $\epsilon$  — параметр деформации, который характеризует два предельных случая, а именно при  $\epsilon = 0$  — модель двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключённом в гармонической ловушке [1–3], а при  $c = 0, \epsilon = 1$  — модель двух точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью [4–6].

Фазовое пространство  $\mathcal{P}$  задаётся в виде прямого произведения двух открытых кругов радиуса 1 с выколотым множеством столкновений вихрей:

$$\mathcal{P} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1, z_1 \neq z_2\}.$$

Пуассонова структура на фазовом пространстве  $\mathcal{P}$  задаётся в стандартном виде

$$\{z_k, \bar{z}_j\} = -\frac{2i}{\Gamma_k} \delta_{kj}, \quad (3)$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера.

Система (1) допускает один дополнительный первый интеграл движения — момент завихрённости:

$$F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2.$$

Функция  $F$  вместе с гамильтонианом  $H$  образуют на  $\mathcal{P}$  полный инволютивный набор интегралов сис-

темы (1). Согласно теореме Лиувилля—Арнольда регулярная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы представляет собой несвязное объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Определим интегральное отображение  $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , полагая  $(f, h) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}), H(\mathbf{x}))$ . Обозначим через  $\mathcal{C}$  совокупность всех критических точек отображения момента, т.е. точек, в которых  $\text{rank } d\mathcal{F}(\mathbf{x}) < 2$ . Множество критических значений  $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$  называется бифуркационной диаграммой.

В работах [7] и [8] при определённом значении параметра вихревого взаимодействия ( $c = 1$ ) в случае интенсивностей противоположных и одинаковых знаков аналитически исследована бифуркационная диаграмма задачи о движении системы двух точечных вихрей в бозе-эйнштейновском конденсате. В [9] и [10] выполнена редукция к системе с одной степенью свободы и при отсутствии параметра деформации ( $\varepsilon = 0$ ) для значений физического параметра  $c > 3$  обнаружена бифуркация трёх торов в один. Такая бифуркация оказалась неустойчивой, и приведено её возмущённое слоение. Для другого предельного случая ( $c = 0, \varepsilon = 1$ ) бифуркационный анализ динамики двух точечных вихрей в идеальной жидкости, ограниченной круговой областью, выполнен в [5] и [6]. Для указанных предельных случаев были получены совершенно различные бифуркационные диаграммы. А. В. Борисов предложил рассмотреть обе эти интегрируемые модели и выяснить, как связаны бифуркационные диаграммы обоих предельных случаев. В настоящей публикации в случае положительной вихревой пары ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ), представляющей интерес для физических экспериментальных приложений, для обобщённой математической модели, описываемой (1), (2), получена новая бифуркационная диаграмма, для которой указана бифуркация четырёх торов в один. Наличие бифуркаций трёх и четырёх торов в интегрируемой модели динамики вихрей, имеющих положительные интенсивности, свидетельствует о сложном переходе и связи бифуркационных диаграмм обоих предельных случаев.

## 2. БИФУРКАЦИОННАЯ ДИАГРАММА

В случае положительной вихревой пары ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ) определим полиномиальные выражения  $F_k$  от фазовых переменных:

$$F_1 = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

$$F_2 = [x_1(x_2^2 + y_2^2) - x_2][(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + y_2^2) \times \\ \times [x_1(x_2^2 + y_2^2) - c x_2] + x_2[(c - 2)(x_2^2 + y_2^2)^2 x_1^2 + \\ + c x_2^2]] + \varepsilon(x_2^2 + y_2^2 - 1)(x_1^2(x_2^2 + y_2^2) - x_2^2) \times \\ \times [(x_2^2 + y_2^2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) - x_2^2]$$

и обозначим через  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  замыкания множеств решений следующих систем:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad y_1 + y_2 = 0 \quad (4)$$

и

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0. \quad (5)$$

Тогда справедлива

**Теорема 1.** *В случае положительной вихревой пары множество  $\mathcal{C}$  критических точек отображения момента  $\mathcal{F}$  совпадает с множеством решений систем (4) и (5). Множества  $\mathcal{N}_1$  и  $\mathcal{N}_2$  являются двумерными инвариантными подмногообразиями системы (1) с гамильтонианом (2).*

Для определения бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  удобно перейти к полярным координатам:

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1, \\ x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2. \quad (6)$$

Подстановка (6) в (4) и (5) приводит к системе

$$\theta_1 = \theta_2 + \pi; \\ \begin{cases} r_1 = r_2; \\ (1 + r_1 r_2)[(r_1^2 + r_2^2)(r_1 r_2 + c) - (c - 2)r_1^2 r_2^2 - c] + \\ + \varepsilon(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  определена на плоскости  $\mathbb{R}^2(f, h)$  и состоит из двух кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , где

$$\gamma_1: h = \ln\left(1 - \frac{f}{2}\right) - \frac{1}{2}(c + \varepsilon)\ln(2f) + \varepsilon \ln\left(1 + \frac{f}{2}\right), \\ 0 < f < 2; \quad (7) \\ \gamma_2: \begin{cases} h = \ln(x^\varepsilon \sqrt{x^2 - 1} z^{1-c}), \\ f = z^2 - 2xz + 2, \\ z = \frac{x[(\varepsilon + c)(x^2 - 1) + 1]}{(\varepsilon + 1)x^2 - \varepsilon}, \end{cases} \quad x \in (1; x_0].$$

Здесь через  $x_0$  обозначен корень уравнения

$$(z - 2x)^2 = 4(x^2 - 1), \quad x > 1. \quad (8)$$

На рис. 1 и 2 в случае положительной вихревой пары для значений параметров  $\varepsilon = 28, c = 12$  приведены бифуркационная диаграмма и её увеличенный фрагмент. Отметим, что кривая  $\gamma_2$  имеет точки возврата  $A, B$  и точку касания  $C$  с кривой  $\gamma_1$  для указанных значений параметров при

$$x_0 = \frac{\sqrt{570}}{1140} \sqrt{2312 + \sqrt[3]{2\,885\,048 - 294\,690\sqrt{6}} + \sqrt[3]{2\,885\,048 + 294\,690\sqrt{6}}} \approx 1,06678;$$

$$f_C = \frac{2}{57} \left[ 45 + \frac{\sqrt[3]{141^2}}{\sqrt[3]{45 + 19\sqrt{6}}} - \sqrt[3]{141(45 + 19\sqrt{6})} \right] \approx 0,9667958154;$$

$$h_C \approx -2,8066772742.$$

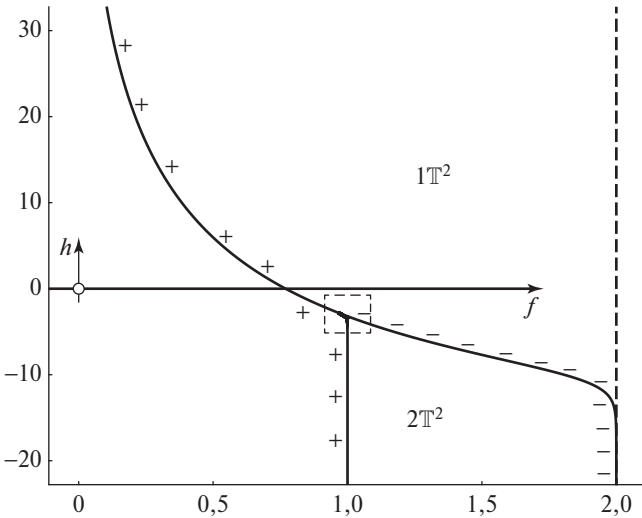


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма  $\Sigma$ .

Указанная на рис. 2а точка касания  $C$  удовлетворяет (8). Знаки “+” и “-” соответствуют эллиптическим (устойчивым) и гиперболическим периодическим решениям в фазовом пространстве [11]. Как и следовало ожидать, смена типа происходит в точках возврата  $A$  и  $B$ , а также в точке касания  $C$  бифуркационной диаграммы  $\Sigma$ . Для наглядности приведём явное выражение коэффициента  $C_F$ , который отвечает за тип (эллиптический/гиперболический) гладкой ветви кривой  $\gamma_1$ :

$$\gamma_1: C_F = (4 - c + 3\epsilon)f^3 + 2(c + 4 - 7\epsilon)f^2 + 4(c + 5\epsilon)f - 8(c + \epsilon), \quad 0 < f < 2.$$

При  $C_F < 0$  получим точку типа “центр” (соответствующее периодическое решение имеет эллиптический тип, является устойчивым периодическим решением в фазовом пространстве, пределом концентрического семейства двумерных регулярных торов), а при  $C_F > 0$  получим точку типа “седло” (соответствующее периодическое решение имеет гиперболический тип, существуют движения, асимптотические к этому решению, лежащие на двумерных сепаратрисных поверхностях).

### 3. О БИФУРКАЦИИ ЧЕТЫРЁХ ТОРОВ

Выполним явное приведение к системе с одной степенью свободы в случае положительной вихревой пары ( $\Gamma_1 = \Gamma_1 = 1$ ) подобно тому, как это сделано в [9]. Для этого в системе (1) с гамильтонианом (2) перейдём от фазовых переменных  $(x_k, y_k)$  к новым переменным  $(u, v, \alpha)$  по формулам

$$x_1 = u \cos(\alpha) - v \sin(\alpha), \quad y_1 = u \sin(\alpha) + v \cos(\alpha),$$

$$x_2 = \sqrt{f - u^2 - v^2} \cos(\alpha), \quad y_2 = \sqrt{f - u^2 - v^2} \sin(\alpha).$$

Физические переменные  $(u, v)$  представляют собой декартовы координаты одного из вихрей в системе координат, связанной с другим вихрем, враща-

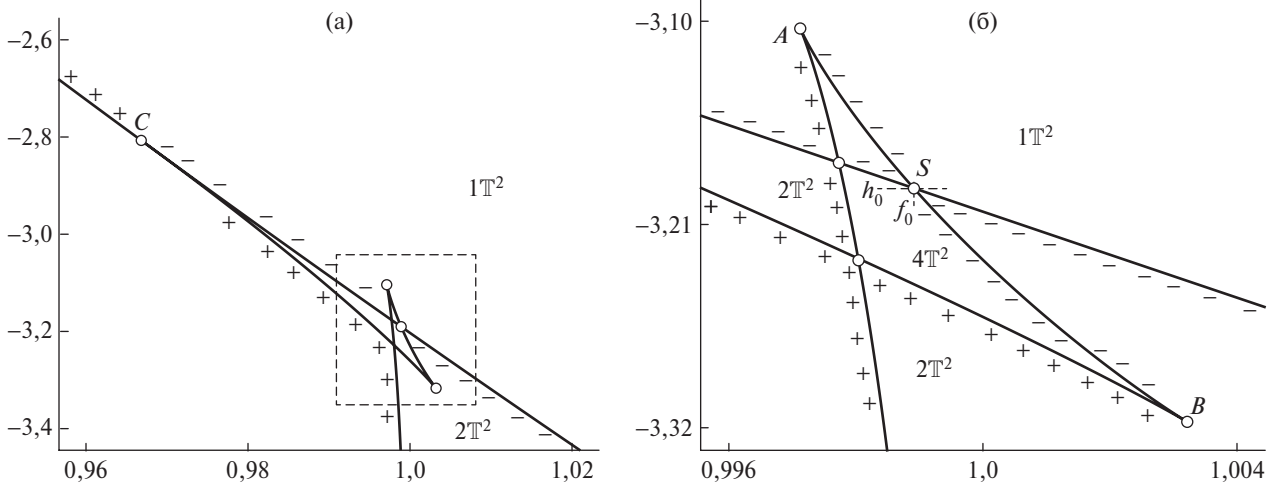


Рис. 2. Увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы.

ющейся вокруг центра завихрённости. Обратная замена

$$U = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \quad V = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

приводит к каноническим переменным относительно скобки (3):

$$\{U, V\} = -\{V, U\} = 1, \quad \{U, U\} = \{V, V\} = 0.$$

Система по отношению к новым переменным  $(u, v)$  является гамильтоновой

$$\dot{u} = \frac{\partial H_1}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H_1}{\partial u} \quad (9)$$

с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{1}{2} \{ \ln[(1 - u^2 - v^2)(1 - f + u^2 + v^2)] - (c + \varepsilon) \ln(f - 2u\sqrt{f - u^2 - v^2}) + \varepsilon \ln[(1 - u\sqrt{f - u^2 - v^2})^2 + v^2(f - u^2 - v^2)] \}. \quad (10)$$

Угол поворота  $\alpha(t)$  вращающейся системы координат удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{1 - f + u^2 + v^2} + c \frac{R_1(u, v)}{Q_1(u, v)} + \varepsilon \frac{R_2(u, v)}{Q_2(u, v)},$$

где

$$R_1(u, v) = f(u + \sqrt{f - u^2 - v^2}) - 2u[v^2 + u(u + \sqrt{f - u^2 - v^2})],$$

$$Q_1(u, v) = \sqrt{f - u^2 - v^2} [(f - 2u^2)^2 + 4u^2 v^2],$$

$$R_2(u, v) = (1 - u^2 - v^2) [\sqrt{f - u^2 - v^2} (1 + u^2 + v^2) - u(1 + f - u^2 - v^2)],$$

$$Q_2(u, v) = \sqrt{f - u^2 - v^2} \{ (u^2 + v^2) f^2 - 2\sqrt{f - u^2 - v^2} (1 + u^2 + v^2) (1 + f - u^2 - v^2) u + f[1 - (u^2 + v^2)^2] + 4u^2 (f - u^2 - v^2) \}.$$

Неподвижные точки редуцированной системы (9) определяются критическими точками приведённого гамильтониана (10) и соответствуют относительным равновесиям вихрей в системе (1). Для фиксированного значения интеграла момента завихрённости  $f$  регулярные уровни приведённого гамильтониана компактны и движения происходят по замкнутым кривым. Можно показать, что критические значения приведённого гамильтониана определяют бифуркационную диаграмму (7). В точке  $S$  пересечения бифуркационных кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 2б), для которой  $x_S = 1,008383; f_0 = 0,9989101; h_0 = -3,1903429$ , движение на плоскости  $(u, v)$  происходит по кривой, которая топологически устроена как  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1$  (рис. 3б), а интегральная критическая поверхность представляет собой тривиальное расслоение над  $\mathbb{S}^1$  со слоем  $\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1$ .

При переходе через точку  $S$  бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  вдоль прямой  $h = h_0$  (рис. 2б) реализуется бифуркация четырёх торov в один  $4\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{T}^2$ . С помощью линий уровней приведённого гамильтониана (10) на рис. 3 наглядно продемонстрирована указанная бифуркация.

В заключение отметим, что аналитические результаты настоящего сообщения (бифуркационная диаграмма (7), сведение к системе с одной степенью свободы (9), анализ устойчивости) в случае положительной вихревой пары ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ ) составляют основу компьютерного моделирования абсолютной динамики вихрей в неподвижной системе координат,

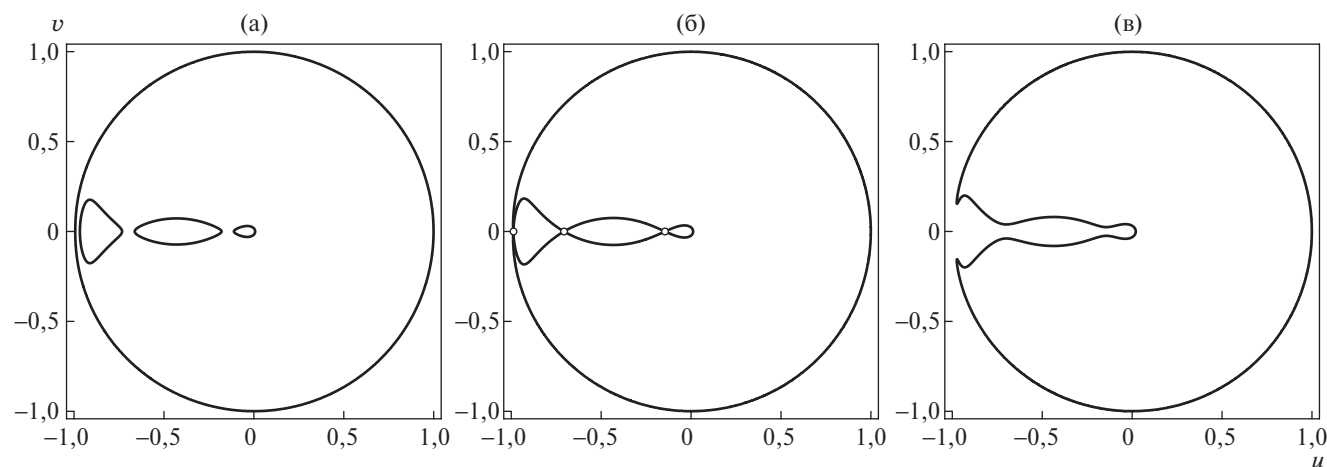


Рис. 3. Линии уровня приведённого гамильтониана  $H_1$  вдоль прямой  $h = h_0$ .

описываемой (1) и (2), в случае произвольных значений интенсивностей  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , физического параметра  $c$  и параметра деформации  $\epsilon$ .

**Благодарности.** Автор выражает благодарность А. В. Борисову за постановку задачи.

**Источники финансирования.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации (1.2404.2017/4.6) и при поддержке гранта РФФИ № 17–01–00846.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Torres P.J., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Carretero-Gonzalez R., Schmelcher P., Hall D.S.* Dynamics of Mortex Bipoles in Confined Bose—Einstein Condensates // *Phys. Lett. A.* 2011. V. 375. P. 3044–3050.
2. *Navarro R., Carretero-González R., Torres P.J., Kevrekidis P.G., Frantzeskakis D.J., Ray M.W., Alntuntas E., Hall D.S.* Dynamics of Few Co-Rotating Vortices in Bose—Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110. № 22. P. 225 301–1–6.
3. *Koukouloyannis V., Voyatzis G., Kevrekidis P.G.* Dynamics of Three Noncorotating Vortices in Bose—Einstein Condensates // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 89. № 4. P. 042905–1–14.
4. *Greenhill A.G.* Plane Vortex Motion // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1877/78. V. 15. № 58. P. 10–27.
5. *Kilin A.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* The Dynamics of Point Vortices Inside and Outside a Circular Domain. In: *Basic and Applied Problems of the Theory of Vortices.* Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics / Inst. Comput. Sci., 2003. P. 414–440.
6. *Kilin A.A., Borisov A.V., Mamaev I.S.* The Dynamics of Point Vortices Inside and Outside a Circular Domain. In: *Mathematical Methods of Vortex Structure Dynamics.* M.; Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics / Inst. Comput. Sci., 2005. P. 148–173.
7. *Sokolov S.V., Ryabov P.E.* Bifurcation Analysis of the Dynamics of Two Vortices in a Bose—Einstein Condensate. The Case of Intensities of Opposite Signs // *Reg. and Chaot. Dyn.* 2017. V. 22. № 8. P. 979–998.
8. *Соколов С.В., Рябов П.Е.* // ДАН. 2018. Т. 480. № 6. С. 652–656.
9. *Рябов П.Е.* // ДАН. 2019. Т. 485. № 6. С. 670–675.
10. *Ryabov P.E., Sokolov S.V.* Phase Topology of Two Vortices of the Identical Intensities in Bose—Einstein Condensate // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2019. V. 15. № 1. P. 59–66.
11. *Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С.* // УМН. 2010. Т. 65. № 2. С. 71–132.

## ON BIFURCATION OF THE FOUR LIOUVILLE TORI IN ONE GENERALIZED INTEGRABLE MODEL OF THE VORTEX DYNAMICS

P. E. Ryabov

*Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation  
Institute of Machines Science Named after A.A. Blagonravov of the Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russian Federation  
Udmurt State University, Izhevsk, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov March 28, 2019

Received March 29, 2019

The article deals with a generalized mathematical model of the dynamics of two point vortices in the Bose—Einstein condensate enclosed in a harmonic trap, and of the dynamics of two point vortices in an ideal fluid bounded by a circular region. In the case of a positive vortex pair, which is of interest for physical experimental applications, a new bifurcation diagram is obtained, for which the bifurcation of four tori into one is indicated. The presence of bifurcations of three and four tori in the integrable model of vortex dynamics with positive intensities indicates a complex transition and the connection of bifurcation diagrams of both limit cases. Analytical results of this publication (the bifurcation diagram, the reduction to a system with one degree of freedom, the stability analysis) form the basis of computer simulation of absolute dynamics of vortices in a fixed coordinate system in the case of arbitrary values of the physical parameters of the model (the intensities, the vortex interaction and etc.).

**Keywords:** completely integrable hamiltonian systems, bifurcation diagram of momentum mapping, bifurcations of Liouville tori, dynamics of vortices, Bose—Einstein condensate.