

УДК 531.01

НОВЫЕ СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА С ДИССИПАЦИЕЙ

М. В. Шамолин

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 04.04.2019 г.

Поступило 05.04.2019 г.

В работе показана интегрируемость некоторых классов однородных по части переменных динамических систем седьмого порядка, в которых выделяется система на касательном расслоении к трёхмерным многообразиям. При этом силовые поля обладают диссипацией разного знака и обобщают ранее рассмотренные.

Ключевые слова: динамическая система, интегрируемость, диссипация, трансцендентный первый интеграл.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524874381-386>

Определить наличие в системе диссипации бывает довольно затруднительно. Это может быть сделано следующим образом: вполне определённые коэффициенты в уравнениях указывают на рассеяние энергии в одних областях фазового пространства, а в других его областях — на подкачку энергии. Последнее приводит к потере известных первых интегралов (законов сохранения), выражающихся через гладкие функции.

Препятствием к наличию полного набора гладких первых интегралов в системе могут быть притягивающие или отталкивающие предельные множества. При их обнаружении необходимо забыть о полном наборе даже непрерывных во всём фазовом пространстве автономных первых интегралов [1].

В ряде случаев в динамике систем с диссипацией (того или иного знака) если и получается найти полный набор первых интегралов, то среди них обязательно будут первые интегралы, являющиеся трансцендентными (в смысле комплексного анализа) функциями, имеющими существенно особые точки. Поэтому полученные в данной работе результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил. Во множестве работ автора уже затрагивалась данная тематика (см., например, [2, 3]).

1. Замечания к системам третьего и пятого порядков. Пусть v, α, z — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z

(см. также [4]). Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = vdt$, $\frac{d}{dq} = \langle ' \rangle$, $v \neq 0$), ранее изучалась система третьего порядка

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z)v, & \alpha' &= -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' &= -Z\Psi(\alpha, Z), & \Psi(\alpha, Z) &= -bZ^2\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \end{aligned} \quad (1)$$

$z = Zv$, $b \geq 0$, $\delta(\alpha)$ — некоторая гладкая функция, как система при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение на v отделяется, что делает возможным рассматривать два оставшихся уравнения в качестве системы с одной степенью свободы на двумерном многообразии $N^2\{Z; \alpha\}$ [5].

Система (1) имеет два гладких первых интеграла. Независимая же подсистема на $N^2\{Z; \alpha\}$ имеет рациональный по Z первый интеграл (см. также [4, 6]). Если добавить в систему (1) внешнее силовое поле $F(\alpha)$ при $b > 0$

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z)v, & \alpha' &= -Z + bZ^2\delta(\alpha), \\ Z' &= F(\alpha) - Z\Psi(\alpha, Z), \end{aligned}$$

создаётся впечатление, что система осталась консервативной (что имеет место при $b = 0$ [2, 3]). Действительно, при некотором условии у данной системы существует гладкий первый интеграл, структура которого напоминает интеграл полной энергии. Но дополнительного гладкого первого интеграла система, вообще говоря, не имеет. Более того, если $F(\alpha) = \delta(\alpha)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}$, дополнительный интеграл является трансцендентной функцией фазовых переменных (т.е. имеет существенно особые точки, означа-

Московский государственный университет

им. М.В. Ломоносова

E-mail: shamolin@rambler.ru; shamolin@imec.msu.ru

ющие наличие в системе притягивающих предельных множеств) [7].

Аналогичным образом рассматриваются системы пятого порядка на многообразии с ненулевыми коэффициентами связности Γ^i_{jk} :

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z_1, Z_2)v, \\ \Psi(\alpha, Z_1, Z_2) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2) \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \\ \alpha' &= -Z_2 + b(Z_1^2 + Z_2^2)\delta(\alpha), \\ Z_2' &= \Gamma_{\beta\beta}^\alpha(\alpha, \beta)f^2(\alpha)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha\beta}^\beta(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z_1, Z_2), \\ \beta' &= Z_1 f(\alpha), \end{aligned}$$

$z_k = Z_k v, k = 1, 2; b \geq 0, \delta(\alpha), f(\alpha)$ — некоторые гладкие функции, как системы при отсутствии внешнего поля сил. В них также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1), данные коэффициенты не нарушают консервативности, поскольку данные системы обладают полным набором (четырьмя) гладких первых интегралов.

2. Системы седьмого порядка при отсутствии внешнего силового поля. Пусть $v, \alpha, \beta = (\beta_1, \beta_2), z = (z_1, z_2, z_3)$ — фазовые переменные в системе, правые части которой — однородные полиномы степени 2 по переменным v, z (см. также [8]) с коэффициентами, зависящими от α, β . Тогда, выбирая в качестве нового времени переменную q ($dq = v dt, \frac{d}{dq} = \langle ' \rangle, v \neq 0$), будем рассматривать систему седьмого порядка

$$\begin{aligned} v' &= \Psi(\alpha, Z)v, \\ \Psi(\alpha, Z) &= -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha}, \quad (2) \\ \alpha' &= -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha), \\ Z_3' &= \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)f_1^2(\alpha)Z_2^2 + \\ &+ \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)f_2^2(\alpha)g^2(\beta_1)Z_1^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_2 Z_3 - \\ &- \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \quad (3) \\ Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_3 - \\ &- \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_2 f_1(\alpha), \\ \beta_2' &= -Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \end{aligned}$$

$Z = (Z_1, Z_2, Z_3), z_k = Z_k v, k = 1, 2, 3; b \geq 0, \delta(\alpha), f_1(\alpha), f_2(\alpha), g(\beta_1)$ — некоторые гладкие функции, как системе при отсутствии внешнего поля сил. При этом уравнение (2) отделяется, что позволяет нам рассматривать уравнения (3) в качестве независимой системы (с тремя степенями свободы) на шестимерном многообразии $N^6\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\} = TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ (касательном расслоении гладкого трёхмерного многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, см. также [2, 7, 8]).

Рассмотрим структуру системы (3). Она для простоты соответствует следующим уравнениям геодезических линий на касательном расслоении $TM^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ многообразия $M^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$ [9] (в частности, сферы или поверхностей вращения с шестью или девятью ненулевыми коэффициентами связности):

$$\begin{aligned} \alpha'' + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_1^{\cdot 2} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\beta_2^{\cdot 2} &= 0, \\ \beta_1'' + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\alpha' \beta_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\beta_2^{\cdot 2} &= 0, \quad (4) \\ \beta_2'' + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\alpha' \beta_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\beta_1 \beta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Действительно, выбрав новые координаты Z_1, Z_2, Z_3 в касательном пространстве в виде

$$\alpha' = -Z_3, \quad \beta_1' = Z_2 f_1(\alpha), \quad \beta_2' = Z_1 f_2(\alpha) g(\beta_1), \quad (5)$$

мы получаем соотношения на них в следующем виде (ср. с системой (3)):

$$\begin{aligned} Z_1' &= \left[2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1 Z_3 - \\ &- \left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) Z_1 Z_2, \\ Z_2' &= \left[2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_2 Z_3 - \\ &- \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g^2(\beta_1) Z_1^2, \\ Z_3' &= \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) Z_2^2 + \\ &+ \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) Z_1^2, \end{aligned} \quad (6)$$

при этом уравнения (4) почти всюду эквивалентны совокупности (5), (6), которая прежде всего присутствует в системе (3).

В системе (3) также присутствуют коэффициенты при параметре $b \geq 0$. Но, как и в системе (1), они не нарушают консервативности, поскольку система (2), (3) обладает полным набором (пятью) гладких первых интегралов.

Предложение 1. Если всюду на своей области определения справедлива система равенств

$$2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0,$$

$$2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0, \quad (7)$$

$$\left[2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g^2(\beta_1) \equiv 0,$$

то система (2), (3) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(v; Z_3, Z_2, Z_1) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1^2 = \text{const.} \quad (8)$$

Можно доказать отдельную теорему существования решения $f_1(\alpha), f_2(\alpha), g(\beta_1)$ системы (7) для условий наличия аналитического интеграла (8) для системы (5), (6) уравнений геодезических. Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией вся группа условий (7) нам не потребуется. Тем не менее в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (5) выполнение равенств

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f(\alpha), \quad (9)$$

при этом функция $g(\beta_1)$ должна удовлетворять преобразованному третьему равенству из (7):

$$2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) \equiv 0. \quad (10)$$

Таким образом, функция $g(\beta_1)$ зависит от коэффициентов связности, а вот ограничения на функцию $f(\alpha)$ будут даны ниже.

Предложение 2. Если выполнены свойства (9), (10), при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (11)$$

то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_2(v; Z_2, Z_1; \alpha) = v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (12)$$

при этом функция $\delta(\alpha)$ должна удовлетворять равенству

$$\delta(\alpha) = A_1 f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}, \quad A_1 = \text{const}. \quad (13)$$

Предложение 3. Если выполнено свойство (9), при этом справедливо условие

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (14)$$

а также второе равенство из (11) ($\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha)$) и (13), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_3(v; Z_1; \alpha, \beta_1) = v^2 Z_1 \delta(\alpha) \Phi(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \quad (15)$$

$$\Phi(\beta_1) = g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}.$$

Предложение 4. Пусть выполнено свойство (9) и

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) g^2(\beta_1) = \Gamma_3(\alpha). \quad (16)$$

Тогда система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_0(v; Z_3; \alpha) = v^2 (1 - 2bZ_3 \delta(\alpha)) = C_0 = \text{const}, \quad (17)$$

если функция $\delta(\alpha)$ удовлетворяет равенству

$$\delta(\alpha) = A_2 \exp \left\{ - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_3(b) f^2(b) db \right\}, \quad A_2 = \text{const}.$$

В частности, если выполнены свойства (7), (9), (11), (13), (16), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида (17).

Предложение 5. Если выполнены условия (9)–(11), (13), то система (2), (3) имеет гладкий первый интеграл вида

$$\Phi_4(\beta_1, \beta_2, C_2, C_3) = \beta_2 + \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{C_3^2 g(b)}{\sqrt{C_2^2 \Phi^2(b) - C_3^2}} db = C_4 = \text{const}, \quad (18)$$

где после взятия интеграла (18) вместо постоянных C_2, C_3 можно подставить левые части равенств (12), (15) соответственно.

Теорема 1. Если выполнены условия (7), (9)–(11), (13), (16), то система (2), (3) обладает полным набором (пятью) гладких независимых первых интегралов вида (8), (12), (15), (17), (18).

3. Введение внешнего силового поля. Модифицируем систему (2), (3) при условиях (9)–(11), (14), (16) при наличии двух ключевых параметров $b, b_1 \geq 0$, вводя внешнее силовое поле. Если ввести такое поле, добавив коэффициент $F(\alpha)$ лишь в уравнение на Z_3' системы (19), (20) и даже положив при этом $b_1 = 0$, то полученная система, вообще говоря, не будет консервативной. Консервативность будет при дополнительном условии: $b = 0$. Но мы расширим введение силового поля, положив $b_1 > 0$. Рассматриваемая система на прямом произведении числового луча и касательного расслоения $TM^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ примет вид

$$v' = \Psi(\alpha, Z)v,$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} + b_1 F(\alpha) \delta(\alpha), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ \tilde{f}(\alpha) &= \frac{\mu - \delta^2(\alpha)}{d\delta(\alpha)/d\alpha}, \\ Z_3' &= F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_2^2 + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_1^2 - \\ &\quad - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_2' &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_2Z_3 - \\ &\quad - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)f(\alpha)g^2(\beta)Z_1^2 - Z_2\Psi(\alpha, Z), \\ Z_1' &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_1Z_3 - \\ &\quad - \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f(\alpha)Z_1Z_2 - Z_1\Psi(\alpha, Z), \\ \beta_1' &= Z_2f(\alpha), \\ \beta_2' &= Z_1f(\alpha)g(\beta_1), \end{aligned} \tag{20}$$

$\mu = \text{const}$. При этом коэффициенты консервативной составляющей силового поля содержат параметр b , а неконсервативной составляющей внешнего поля — параметр b_1 .

Силовое поле в уравнениях на v' , Z_1' , Z_2' , Z_3' определяется функцией $\Psi(\alpha, Z)$. Опишем введение силового поля в виде двумерного столбца, в первой строке которого стоят коэффициенты из функции $\Psi(\alpha, Z)$, а во второй строке — коэффициенты из уравнения на α' . Таким образом, совместное силовое поле (в котором присутствуют три параметра b , $b_1 \geq 0$, μ) будет иметь вид

$$U \begin{pmatrix} b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) \\ b_1F(\alpha) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} & \delta(\alpha) \\ \delta(\alpha) & \tilde{f}(\alpha) \end{pmatrix},$$

где U — преобразование с определителем, равным $-\mu$ и являющимся унимодулярным преобразованием при $\mu = \pm 1$. Такое преобразование вносит в систему диссипацию (как одного знака, так и другого, см. также [2, 3, 8]).

4. Интегрирование системы с диссипацией. Перейдём теперь к интегрированию искомой системы седьмого порядка (19), (20) при выполнении свойства (10). Она также допускает отделение независимой подсистемы пятого порядка.

Введём также (по аналогии с (10)) ограничение и на функцию $f(\alpha)$: она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (7):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \tag{21}$$

Для полного интегрирования системы (20) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых

первых интегралов. Однако после замены переменных

$$Z_1, Z_2 \rightarrow Z_0, Z_*, \quad Z_0 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}, \quad Z_* = \frac{Z_2}{Z_1}$$

система (20) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b(Z_3^2 + Z_0^2)\delta(\alpha) + b_1F(\alpha)\tilde{f}(\alpha), \\ Z_3' &= F(\alpha) + \Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha)Z_0^2 - Z_3\Psi(\alpha, Z), \\ Z_0' &= \left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha} \right] Z_0Z_3 - Z_0\Psi(\alpha, Z), \\ Z_*' &= (\pm)Z_0\sqrt{1 + Z_*^2}f(\alpha) \left[2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d\ln|g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \beta_1' &= (\pm)\frac{Z_0Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}}f(\alpha), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\beta_2' = (\pm)\frac{Z_0}{\sqrt{1 + Z_*^2}}f(\alpha)g(\beta_1), \tag{24}$$

$$\Psi(\alpha, Z) = -b(Z_3^2 + Z_0^2)\frac{d\delta(\alpha)}{d\alpha} + b_1F(\alpha)\delta(\alpha).$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (20) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (22), один — системы (23) и дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24) (т.е. всего четыре).

Теорема 2. Пусть для некоторых $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$\Gamma_3(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa\frac{d}{d\alpha}\ln|\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda\frac{d}{d\alpha}\frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \tag{25}$$

Тогда система (19), (20) при выполнении свойств (10), (21) обладает пятью независимыми (вообще говоря, трансцендентными [10] в смысле комплексного анализа) первыми интегралами.

В общем случае первые интегралы выписываются громоздко. В частности, если $\kappa = -1$, то явный вид одного из первых интегралов таков:

$$\begin{aligned} \Theta_1(Z_3, Z_0; \alpha) &= G_1\left(\frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = \\ &= \frac{Z_3^2 + Z_0^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{Z_0\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \end{aligned} \tag{26}$$

При помощи интеграла (26) получается и дополнительный первый интеграл для системы (20), который имеет следующий структурный вид:

$$\begin{aligned} \Theta_2(Z_3, Z_0; \alpha) &= G_2\left(\delta(\alpha), \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}, \frac{Z_0}{\delta(\alpha)}\right) = \\ &= C_2 = \text{const}. \end{aligned} \tag{27}$$

Выражение первого интеграла (27) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции $\delta(\alpha)$. Например, при $\kappa = -1$ этот первый интеграл найдётся из уравнения Бернулли

$$\frac{d\delta}{du_3} = \frac{(b_1\lambda\mu - u_3)\delta + b\delta^3(U^2(C_1, u_3) + u_3^2) - b_1\lambda\delta^3}{\lambda - b_1\lambda\mu u_3 + u_3^2 - U^2(C_1, u_3)},$$

$$U(C_1, u_3) = \frac{\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(\lambda - b_1\lambda\mu u_3 + u_3^2)}\}}{2},$$

$$u_3 = \frac{Z_3}{\delta(\alpha)}.$$

При этом после взятия этого интеграла вместо C_1 можно подставить левую часть равенства (26).

Первый интеграл для независимой (после замены независимого переменного) подсистемы (23) будет иметь вид

$$\Theta_3(Z_*; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + Z_*^2}}{\Phi(\beta_1)} = C_3 = \text{const}, \quad (28)$$

о функции $\Phi(\beta_1)$ см. (15). А дополнительный первый интеграл, “привязывающий” уравнение (24), находится по аналогии с (18):

$$\Theta_4(\beta_1, \beta_2, C_3) = \beta_2 \pm \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \frac{g(b)}{\sqrt{C_3^2 \Phi^2(b) - 1}} db =$$

$$= C_4 = \text{const},$$

при этом после взятия этого интеграла вместо C_3 можно подставить левую часть равенства (28).

Кроме того, у системы (19), (20) существует гладкий первый интеграл (по аналогии с (17), “привязывающий” уравнение (19)), который, например, при $b = b_1, \mu = 1$ примет вид

$$\Theta_0(v; Z_3, Z_0; \alpha) =$$

$$= v^2(1 - 2bZ_3\delta(\alpha) + b^2(Z_3^2 + Z_0^2)) =$$

$$= C_0 = \text{const}.$$

Справедлива и теорема, обратная к теореме 2.

Теорема 3. *Условия (10), (21), (25) (например, при $\kappa = -1$) являются необходимыми условиями существования первого интеграла (26) для системы (19), (20).*

5. Строение первых интегралов для систем с диссипацией. Если α — периодическая координата периода 2π , то система (19), (20) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним [8, 9]. При этом при $F(\alpha) \equiv 0$ она превращается в систему консерва-

тивную (2), (3). Последняя, в частности, обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (8), (12). Более того, если функция $F(\alpha)$ не равна тождественно нулю, но $b_1 = 0$, то система (19), (20) при втором условии из (25) обладает первым интегралом вида

$$\Xi_0(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) =$$

$$= v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + \lambda\delta^2(\alpha)) = \text{const}. \quad (29)$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (29), (12) также является первым интегралом системы (19), (20) при неравенстве функции $F(\alpha)$ тождественно нулю, но $b_1 = 0$. Но при $b_1 > 0$ каждая из функций

$$\Xi_{b_1}(v; Z_3, Z_2, Z_1; \alpha) =$$

$$= v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - b_1\lambda\mu Z_3\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)) \quad (30)$$

и (12) по отдельности не является первым интегралом системы (19), (20). Однако отношение функций (30), (12) является первым интегралом (26) системы (19), (20) (при $\kappa = -1$) при любом $b_1 > 0$.

Вообще же, как и указывалось ранее, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. также [1–3]).

З а к л ю ч е н и е. Выделим существенный случай для функции $f(\alpha)$, определяющей метрику на трёхмерной сфере, и $\delta(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \delta(\alpha) = \sin \alpha. \quad (31)$$

Случай (31) формирует класс систем (19), (20) при $\mu = 1$, соответствующих движению четырёхмерного динамически симметричного твёрдого тела на нулевых уровнях циклических интегралов в неконсервативном поле сил [8, 9]. В частности, при $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$ рассматриваемая система описывает геодезический поток на трёхмерной сфере. В случае (31), если $\delta(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\cos \alpha}$, то система описывает движение четырёхмерного твёрдого тела в силовом поле $F(\alpha)$ под действием следящей силы [8]. В частности, если $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha, \delta(\alpha) = \sin \alpha$, то система эквивалентна обобщённому (сферическому) четырёхмерному маятнику, помещённому в некоторое неконсервативное поле, и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Если функция $\delta(\alpha)$ не является периодической, то почти всегда рассматриваемая система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. она является “собственно” диссипативной). Тем не менее и в этом случае (благодаря теоремам 2 и 3) можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым нетривиальным случаем интегрируемости многомерных диссипативных систем в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шамолин М.В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. 1998. Т. 53. В. 3. С. 209–210.
2. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении трехмерного многообразия // ДАН. 2017. Т. 477. № 2. С. 168–172.
3. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемых систем с диссипацией на касательном расслоении многомерного многообразия // ДАН. 2018. Т. 482. № 5. С. 527–533.
4. *Козлов В.В.* Рациональные интегралы квазиоднородных динамических систем // ПММ. 2015. Т. 79. № 3. С. 307–316.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. 1983. Т. 38. В. 1. С. 3–67.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
7. *Трофимов В.В., Шамолин М.В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. и прикл. математика. 2010. Т. 16. В. 4. С. 3–229.
8. *Шамолин М.В.* Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 125. М.: ВИНТИ, 2013. С. 5–254.
9. *Шамолин М.В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам // ДАН. 2016. Т. 471. № 5. С. 547–551.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1987.

NEW CASES OF INTEGRABLE SEVENTH-ORDER SYSTEMS WITH DISSIPATION

M. V. Shamolin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov April 4, 2019

Received April 5, 2019

The paper shows the integrability of certain classes of seventh-order dynamic systems that are homogeneous in part, in which the system on the tangent bundle to three-dimensional manifolds is distinguished. In this case, the force fields have various dissipation and generalize the previously considered ones.

Keywords: dynamical system, integrability, dissipation, transcendental first integral.