ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том* 487, № 5, *с.* 483–486

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

О ПРИНЦИПЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА

В. И. Богачев[1,2,3,*], М. Рёкнер[4], С. В. Шапошников[1,2,]**

Представлено академиком РАН А.Н. Ширяевым 29.03.2019 г.

Поступило 18.04.2019 г.

Даётся обобщение принципа суперпозиции для вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, согласно которому такое решение порождается решением соответствующей мартингальной задачи.

Ключевые слова: уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, принцип суперпозиции, мартингальная задача.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524875483-486

В этом сообщении даётся существенное обобщение так называемого принципа суперпозиции (см. [1–5]) для вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, согласно которому такое решение порождается решением соответствующей мартингальной задачи. Нами показано, что интегрируемость коэффициентов диффузии и сноса A и b относительно решения, предполагавшаяся в работе [4], может быть заменена на интегрируемость функции $\frac{\|A(t,x)\|+|\langle b(t,x),x\rangle|}{1+|x|^2}$. Следовательно, в том случае, когда нет априорного условия глобальной интегрируемости, функция $\|A(t,x)\|+|\langle b(t,x),x\rangle|$ может иметь квадратичный рост. Имевшиеся ранее результаты в этом случае требовали ограниченности коэффициентов. Более того, в качестве следствия получаем, что при довольно мягких условиях на начальное распределение достаточно иметь одностороннюю оценку

$$\langle b(t,x),x\rangle \le C + C|x|^2\log|x|$$

вместе с оценкой

$$\|A(t,x)\| \le C + C|x|^2\log|x|.$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t\mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu_t) - \partial_{x_i}(b^i\mu_t), \quad \mu_0 = \nu, \qquad (1)$$

где ν — борелевская вероятностная мера на $\mathbb{R}^d$ (начальное распределение). Это уравнение будет записываться в краткой форме

$$\partial_t\mu_t = L^*\mu_t,$$

где L^* — формально сопряжённый оператор к дифференциальному оператору

$$Lu = \sum_{i,j} a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_i b^i\partial_{x_i}u.$$

Далее везде предполагается, что матрица $A(t,x) = (a^{ij}(t,x))_{i,j\le d}$ симметрична и неотрицательно определена и функции $(t,x)\mapsto a^{ij}(t,x)$ и $(t,x)\mapsto b^i(t,x)$ борелевски измеримы на $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. Под решением понимается отображение $t\mapsto\mu_t$ из $[0,T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, которое непрерывно относительно слабой топологии (см. [6]) и удовлетворяет интегральному равенству

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\mu_t = \int_{\mathbb{R}^d}\varphi d\nu + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} L\varphi d\mu_s ds$$

для всех $t\in[0,T]$ и всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, где предполагается, что a^{ij} и b^i локально (т.е. на компактных множествах в $[0,T]\times\mathbb{R}^d$) интегрируемы относительно меры $\mu_t dt$:

$$a^{ij},\ b^i \in L^1_{loc}(\mu_t dt).$$

Мера $\mu = \mu_t dt$ определяется обычным образом: интеграл от ограниченной борелевской функции f равен

1 *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
2 *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва*
3 *Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет, Москва*
4 *Universität Bielefeld, Deutschland*
**E-mail: vibogach@mail.ru*
***E-mail: starticle@mail.ru*

$$\int f d\mu = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x)\mu_t(dx)dt.$$

Недавний обзор теории уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова см. в [7]. Скалярное произведение и норма на $\mathbb{R}^d$ обозначаются через $\langle x, y\rangle$ и $|x|$ соответственно. Операторная норма матрицы A обозначается через $\|A\|$.

Случай $A = 0$ соответствует так называемому уравнению неразрывности. В этом случае известен следующий принцип суперпозиции (см. [1, 5]). Если $\mu = \mu_t dt$ с вероятностными мерами μ_t на $\mathbb{R}^d$ удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\partial_t \mu_t + \operatorname{div}(b\mu_t) = 0$$

и функция $\dfrac{|b(x, t)|}{1+|x|}$ является μ-интегрируемой, то существует неотрицательная борелевская мера η на пространстве $\mathbb{R}^d \times C([0, T], \mathbb{R}^d)$, сосредоточенная на множестве пар (x, ω) таких, что ω есть абсолютно непрерывное решение интегрального уравнения

$$\omega(t) = x + \int_0^t b(\omega(s), s)ds$$

и для всякой функции $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ и всякого $t \in [0, T]$ имеем

$$\int \varphi(x)\mu_t(dx) = \int \varphi(\omega(t))\eta(dxd\omega).$$

Другими словами, мера μ_t совпадает с образом η при отображении вычисления $(x, \omega) \mapsto \omega(t)$.

Случай возможно ненулевой матрицы A и ограниченных A и b был изучен Фигалли [3], который доказал, что всякое решение задачи Коши для уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова представляется мартингальной мерой на пространстве траекторий. Затем Тревизан [4] получил следующий важный и весьма общий результат.

Предположим, что отображение $t \mapsto \mu_t$ из $[0, T]$ в пространство вероятностных мер $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ непрерывно относительно слабой топологии и является решением задачи Коши (1). Предположим также, что оно удовлетворяет условию

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [\|A(t, x)\| + |b(t, x)|]\mu_t(dx)dt < \infty. \qquad (2)$$

Тогда существует борелевская вероятностная мера P_ν на пространстве траекторий

$$\Omega_d := C([0, T], \mathbb{R}^d)$$

непрерывных функций ω: $[0, T] \to \mathbb{R}^d$ с его стандартной sup-нормой $\|\omega\| = \sup_t |\omega(t)|$, такое, что:

(i) $P_\nu(\omega: \omega(0) \in B) = \nu(B)$ для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^d$;

(ii) для всякой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ функция

$$(\omega, t) \mapsto f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t Lf(s, \omega(s))ds$$

является мартингалом относительно меры P_ν и естественной фильтрации $\mathcal{F}_t = \sigma(\omega(s), s \in [0, t])$;

(iii) для всякой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu_t = \int_{\Omega_d} f(\omega(t))P_\nu(d\omega) \quad \forall t \in [0, T].$$

Последнее означает, что μ_t есть распределение $\omega(t)$ относительно P_ν, в то время как (i) означает, что ν есть распределение $\omega(0)$.

Несмотря на весьма общий характер условия (2), во многих простых ситуациях оно не выполнено. Рассмотрим одномерный пример. Пусть

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \rho > 0, \quad \int \rho(x)dx = 1, \quad b(x) = \frac{\rho'(x)}{\rho(x)}.$$

Тогда $\mu_t(dx) = \mu(dx) = \rho dx$ — стационарное решение уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова

$$\partial_t \mu = \mu'' - (b\mu)'.$$

В частности, $\mu_t = \mu$ является решением задачи Коши с начальным условием μ. Однако легко найти гладкую вероятностую плотность ρ, для которой

$$\int_{\mathbb{R}} |b(x)|\rho(x)dx = \int_{\mathbb{R}} |\rho'(x)|dx = \infty.$$

Наша цель состоит в усилении цитированного результата путём замены условия (2) более слабым предположением.

Всюду далее мы предполагаем, что коэффициенты борелевски измеримы на $[0, T] \times \mathbb{R}^d$:

$$a^{ij}, b^i \in L^1([0, T] \times U, \mu_t dt)$$

для всякого шара U в $\mathbb{R}^d$, причём выполнено следующее условие:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|A(t, x)\| + |\langle b(t, x), x\rangle|}{1+|x|^2}\mu_t(dx)dt < \infty. \qquad (3)$$

Из предложения 1 ниже вытекает (см. также пример 1), что для того, чтобы обеспечить условие (3), достаточно, чтобы $\log(1+|x|) \in L^1(\nu)$ и

$$\|A(t, x)\| \le C + C|x|^2 \log(1+|x|),$$
$$\langle b(t, x), x\rangle \le C + C|x|^2 \log(1+|x|).$$

Ясно также, что достаточны без всяких предположений относительно ν оценки

$$\|A(t, x)\| + |\langle b(t, x), x\rangle| \le C + C|x|^2.$$

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что* $\{\mu_t\}$ — *решение задачи Коши* $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$ *на* $[0, T]$ *с* $\mu_0 = \nu$ *и выполнено* (3). *Тогда существует борелевская вероятностная мера* P_ν *на* $\Omega_d = C([0, T], \mathbb{R}^d)$, *для которой верны все утверждения* (i), (ii) *и* (iii).

Важно, что в этой теореме не предполагается единственность вероятностных решений задачи Коши: мартингальное представление существует для каждого вероятностного решения, удовлетворяющего (3). Принцип суперпозиции не работает без глобальных предположений даже для гладких коэффициентов и $A = I$, так как может случиться, что имеется много вероятностных решений уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова (см. [7, § 9.2]), в то время как мартингальная задача имеет в этом случае единственое решение (см. [8, следствие 10.1.2]) и это решение обязательно соответствует субвероятностному решению уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова из-за взрыва решения.

Доказательство основного результата будет опубликовано в подробной работе вместе с доказательствами нескольких вспомогательных утверждений, представляющих независимый интерес и приведённых ниже. Следующее предложение не только даёт важную априорную оценку в духе классических функций Ляпунова (см. [7], где можно найти множество подобных результатов), но и содержит интересный новый результат: интегрируемость $|LV|$ относительно решения.

Предложение 1. *Предположим, что* $\{\mu_t\}$ — *решение задачи Коши* $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$ *с* $\mu_0 = \nu$ *и существуют неотрицательная функция* $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *и измеримая неотрицательная функция* W *такие, что* $V \in L^1(\nu)$ *и для некоторых чисел* $C \ge 0$ *и* $\tau \in (0, T]$ *имеем*

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV(t, x) \le W(t, x) + CV(x),$$
$$\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} W(t, x)\mu_t(dx)dt < \infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} Vd\mu_t \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} Vd\nu + \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} Wd\mu_s ds\right)e^{Ct} \quad \forall t \in [0, \tau],$$

$$\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} |LV|d\mu_t dt \le 2e^{C\tau}\left(\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} Wd\mu_s ds + \int_{\mathbb{R}^d} Vd\nu\right).$$

Пример 1. Если $\log(1+|x|^2) \in L^1(\nu)$ и

$$\|A(t, x)\| \le C + C|x|^2 \log(1+|x|^2),$$
$$\langle b(t, x), x\rangle \le C + C|x|^2 \log(1+|x|^2),$$

то для некоторого числа C_1 имеем

$$L(\log(1+|x|^2)) \le C_1 + C_1\log(1+|x|^2),$$
$$\frac{\|A(t, x)\|}{1+|x|^2} \le C_1 + C_1\log(1+|x|^2),$$
$$\frac{|\langle b(t, x), x\rangle|}{1+|x|^2} \le$$
$$\le |L(\log(1+|x|^2))| + C_1 + C_1\log(1+|x|^2).$$

Значит, по предложению 1 функции $\log(1+|x|^2)$ и $|L(\log(1+|x|^2))|$ интегрируемы на $[0, T]\times\mathbb{R}^d$ относительно $\mu_t dt$ и выполнено условие (3).

Предложение 2. *Предположим, что* $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$. *Тогда верны следующие утверждения*:

(i) *существует такая функция* $\theta \in C^2(\mathbb{R})$, *что* $\theta(V) \in L^1(\nu)$ *и*

$$\theta \ge 0, \quad \theta(0) = 0, \quad 0 \le \theta'(t) \le 1,$$
$$\theta'' \le 0, \quad \lim_{t\to+\infty}\theta(t) = +\infty;$$

(ii) *предположим, что для некоторого* $\tau \in (0, T]$ *имеем*

$$\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} (|\sqrt{A}\nabla V|^2 + |LV|)d\mu_t dt < \infty$$

и θ *удовлетворяет всем предположениям в* (i), *причём* $\theta(V) \in L^1(\nu)$. *Тогда* $\theta(V)$ *удовлетворяет следующему неравенству*:

$$\int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} (|\sqrt{A}\nabla\theta(V)|^2 + |L\theta(V)|)d\mu_t dt \le$$
$$\le 2e^{C\tau}\left(\int\theta(V)d\nu + \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^d} (|\sqrt{A}\nabla V|^2 + |LV|)d\mu_t dt\right).$$

Следующее утверждение позволяет оценить меру шара в пространстве траекторий с помощью функции V.

Предложение 3. *Пусть* $\tau \in (0, T]$. *Предположим, что* $\{\mu_t\}$ — *решение задачи Коши* $\partial_t\mu_t = L^*\mu_t$ *на* $[0, \tau]$ *с* $\mu_0 = \nu$ *и существует такая борелевская веро-*

ятностная мера P_ν *на* $C([0, \tau], \mathbb{R}^d)$, *что выполнены* (i), (ii) *и* (iii). *Предположим также, что имеется неотрицательная функция* $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ *с* $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty$ *такая, что* $V \in L^1(\nu)$ *и*

$$\int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} (|\sqrt{A}\nabla V|^2 + |LV|)d\mu_t dt < \infty.$$

Тогда для всякого $q > 0$ *имеем*

$$P_\nu\left(\omega\colon \sup_{t\in[0,T]} V(\omega(t)) \ge q\right) \le$$
$$\le \frac{2}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^d} V d\nu + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^d} (|\sqrt{A}\nabla V|^2 + |LV|)d\mu_s ds\right).$$

Доказательство теоремы следует схеме, использованной Фигалли [3] и Тревизаном [4]. Однако имеются некоторые важные отличия: результат Тревизана неприменим даже для гладких коэффициентов без глобальной интегрируемости коэффициентов. Здесь мы существенно используем некоторые недавние результаты о единственности вероятностных решений уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова из [7] и [9].

Принцип суперпозиции может быть полезен для исследования проблем единственности для уравнений Фоккера—Планка—Колмогорова с коэффициентами низкой регулярности, по этой теме см. книгу [7] и статьи [10—15].

Источники финансирования. Это исследование поддержано проектами РФФИ 18—31—20008 и 17—01—00662, CRC1283 при университете Билефельда и грантом DFG RO 1195/12—1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrosio L., Trevisan D.* // Anal. PDE. 2014. V. 7. № 5. P. 1179—1234.
2. *Ambrosio L., Trevisan D.* // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). 2017. V. 26. № 4. P. 729—766.
3. *Figalli A.* // J. Funct. Anal. 2008. V. 254. № 1. P. 109—153.
4. *Trevisan D.* // Electron. J. Probab. 2016. V. 21. Paper № 22. 41 p.
5. *Stepanov E., Trevisan D.* // J. Funct. Anal. 2017. V. 272. № 3. P. 1044—1103.
6. *Bogachev V.I.* Weak convergence of measures / Amer. Math. Soc. Rhode Island, Providence, 2018.
7. *Bogachev V.I., Krylov N.V., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* Fokker—Planck—Kolmogorov equations // Amer. Math. Soc. Rhode Island, Providence, 2015.
8. *Stroock D.V., Varadhan S.R.S.* Multidimensional diffusion processes. B.: Springer-Verlag, 2006.
9. *Manita O.A., Shaposhnikov S.V.* // J. Dynamics Differ. Equ. 2016. V. 28. P. 493—518.
10. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Math. Sci. N.Y., 2011. V. 176. № 6. P. 759—773.
11. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Math. Sci. N.Y., 2011. V. 179. № 1. P. 7—47.
12. *Bogachev V.I., Röckner M., Shaposhnikov S.V.* // J. Evol. Equat. 2013. V. 13. № 3. P. 577—593.
13. *Le Bris C., Lions P.-L.* // Comm. Partial Differ. Equ. 2008. V. 33. № 7—9. P. 1272—1317.
14. *Шапошников С.В.* // Теор. вер. и примен. 2011. Т. 56. № 1. С. 77—99.
15. *Zhang X.* // Bull. Sci. Math. 2010. V. 134. № 4. P. 340—378.

ON THE SUPERPOSITION PRINCIPLE FOR FOKKER—PLANCK—KOLMOGOROV EQUATIONS

V. I. Bogachev[1,2,3], M. Röckner[4], S. V. Shaposhnikov[1,2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation*
[3] *St. Tikhons Orthodox University, Moscow, Russian Federation*
[4] *Bielefeld University, Germany*

Presented by Academician of the RAS A.N. Shiryaev March 29, 2019

Received April 18, 2019

We give a generalization of the so-called superposition principle for probability solutions to the Cauchy problem for the Fokker—Planck—Kolmogorov equation, according to which such a solution is generated by a solution to the corresponding martingale problem.

Keywords: Fokker—Planck—Kolmogorov equation, superposition principle, martingale problem.