ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 5, с. 487–492

МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.23,517.984

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМУМОВ ОЦЕНОК ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ СОБОЛЕВА

Т. А. Гарманова, И. А. Шейпак*

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 26.04.2019 г.

Поступило 30.04.2019 г.

Рассматриваются константы вложения соболевских пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1] \to \overset{\circ}{W}{}_\infty^k[0;1]$, $0 \le k \le n-1$. Исследуются свойства функций $A_{n,k}(x)$, возникающих в неравенствах $|f^{(k)}(x)| \le A_{n,k}(x)\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]}$. При $k = 3, 5$ и при всех допустимых n вычислены точки экстремумов функций $A_{n,k}$. Найден глобальный максимум этих функций, и вычислены точные константы вложения.

Ключевые слова: оценки промежуточных производных, константы вложения, экстремальные сплайны, пространства Соболева.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524875487-492

Задачи об оценках производных функций возникают во многих математических дисциплинах, в частности в теории аппроксимации (задача Стечкина о приближении неограниченных операторов). Неравенства, связывающие производные функций в различных пространствах $L_p(\mathbb{R})$, относятся к классу неравенств типа Колмогорова (см. [1]). На отрезке с таким классом задач тесно связана задача о нахождении точных констант

$$\Lambda_{n,k,p,q} := \sup \frac{\|f^{(k)}\|_{L_q[-1;1]}}{\|f^{(n)}\|_{L_p[-1;1]}},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le n-1$, $1 \le p, q \le \infty$, а точная верхняя грань берётся по $f \in \overset{\circ}{W}{}_p^n[-1;1]$. Числа $\Lambda_{n,k,p,q}$ также называют точными константами вложения. Для $n = 1$, $k = 0$ эта задача полностью решена. При $p = q = 2$ константа вложения была получена В.А. Стекловым [2], при $p = q$ — В.И. Левиным [3], при произвольных p и q — Е. Шмидтом [4]. Подробный исторический обзор приведён в [5].

В работе [6] были получены константы вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при $k = 0, 1, 2$, в [5] — $k = 4, 6$. То обстоятельство, что образовался пробел для нечётных k, неслучайно. Вычисление констант $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при нечётных k оказалось существенно более трудоёмкой задачей по сравнению с чётными.

Цель настоящего сообщения — получение констант вложения $\Lambda_{n,k,2,\infty}$ при $k = 3, 5$. При $q = \infty$ многие свойства констант вложения оказываются тесно связанными с функциями $A_{n,k,p,\infty}(x)$, равными наименьшим возможным величинам в неравенствах

$$|f^{(k)}(a)| \le A_{n,k,p,\infty}(a)\left(\int_{-1}^{1} |f^{(n)}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Поскольку в дальнейшем мы фиксируем значения $p = 2$, $q = \infty$, то для констант вложения и ассоциированных с ними функций $A_{n,k,2,\infty}$ будем использовать обозначение $\Lambda_{n,k}$ и $A_{n,k}$ соответственно. Мы будем изучать константы вложения для функций, определённых на отрезке $[0; 1]$. Это позволит использовать менее громоздкие формулы для полиномов Лежандра, с которыми константы вложения при $p = 2$ и $q = \infty$ оказываются тесно связанными. Кроме того, оказалось, что функция $A_{n,k}(a)$ имеет непосредственное отношение к спектральным задачам, которые обычно рассматриваются на отрезке $[0; 1]$. Заметим, что в этих задачах при спектральном параметре стоит k-я производная δ-функции. Связь со спектральными задачами позволяет легко пересчитывать константы вложения, определённые на одном отрезке, в константы вложения на другом отрезке.

В данной работе мы изучаем неравенства вида

$$|f^{(k)}(a)|^2 \le A_{n,k}^2(a)\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2 dx, \tag{1}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail*: iasheip@yandex.ru

где $a \in (0;1)$, $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]$ — пространство Соболева, состоящее из функций f, все производные которых до порядка $n-1$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0;1]$, и $f^{(n)} \in L_2[0;1]$, а также выполнены краевые условия $f^{(j)}(0) = f^{(j)} = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Также мы будем исследовать максимумы $A_{n,k}(a)$ как функции переменной a. Точнее, нас интересуют величины

$$\Lambda_{n,k} := \sup_{a\in[0;1]} A_{n,k}(a), \quad k = 3, 5. \qquad (2)$$

Как будет показано ниже, при всех допустимых значениях n и k и произвольном $a \in (0;1)$ всегда можно найти функцию $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]$ (экстремальный сплайн), на которой неравенство (1) точно.

1. ВИД ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Для функций $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]$, фиксированного числа $a \in (0;1)$ рассмотрим функционалы $F_{k,a}(f) := f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Очевидна справедливость соотношения

$$\|F_{k,a}\|^2 = A_{n,k}^2(a). \qquad (3)$$

Указанные функционалы непрерывны в $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]$, поэтому по теореме Рисса существует единственная функция $g_{k,a} \in \overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]$ такая, что $F_{k,a}(f) = (f, g_{k,a})_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]}$.

При этом очевидна справедливость соотношения

$$\|F_{k,a}\|^2 = \|g_{k,a}\|^2 = A_{n,k}^2(a). \qquad (4)$$

Поэтому

$$f^{(k)}(a) = \int_0^1 f^{(n)}(x)\overline{g^{(n)}(x)}dx.$$

Разбивая интеграл в сумму

$$\int_0^1 f^{(n)}(x)\overline{g_{k,a}^{(n)}(x)}dx =$$

$$= \int_0^a f^{(n)}(x)\overline{g_{k,a}^{(n)}(x)}dx + \int_a^1 f^{(n)}(x)\overline{g_{k,a}^{(n)}(x)}dx$$

и интегрируя каждый интеграл по частям, получаем следующие условия на функцию $g_{k,a}$:

$$g_{k,a}^{(2n)}\Big|_{[0;a)} = g_{k,a}^{(2n)}\Big|_{(a;1]} \equiv 0, \qquad (5)$$

$$g_{k,a}^{(i)}(a-0) = g_{k,a}^{(i)}(a+0), \quad i \neq 2n-k-1, \qquad (6)$$

$$g_{k,a}^{(i)}(a-0) = g^{(i)}(a+0) + (-1)^{n-k-1}, \quad i = 2n-k-1. \qquad (7)$$

Рассмотрим следующие многочлены:

$$h_{k,n}(x, a) = \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{n-1-l}C_{2n-1-k}^{n-1-l}x^{n-1-l}a^l\sum_{m=0}^{l}C_{n-1+m}^m x^m.$$

Теорема 1. *Функции $g_{n,k}$ определяются формулами*

$$g_{n,k}(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k-1}}{(2n-k-1)!}(1-a)^{n-k}x^n h_{k,n}(1-x, 1-a), & x \in [0;a], \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-k-1)!}a^{n-k}(1-x)^n h_{k,n}(x,a), & x \in [a;1]. \end{cases} \qquad (8)$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке, что функции (8) удовлетворяют соотношениям (5)—(7).

2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОНСТАНТАМИ ВЛОЖЕНИЯ И ПОЛИНОМАМИ ЛЕЖАНДРА

Обозначим через P_n так называемые смещённые полиномы Лежандра, образующие ортогональный базис в пространстве $L_2[0;1]$ и определяемые формулой Родрига

$$P_n(x) := \frac{1}{n!}((x^2-x)^n)^{(n)}.$$

Под первообразной порядка $m \geq 0$ многочлена P_n понимается многочлен

$$(P_n(x))^{(-m)} := \frac{1}{n!}((x^2-x)^n)^{(n-m)}.$$

В работе [6] выведена рекуррентная формула, которая для отрезка $[0;1]$ имеет вид

$$A_{n,k}^2(a) = A_{n-k,0}^2(a) - \sum_{m=n-k}^{n-1}(P_m^{(k-n)}(a))^2(2m+1). \qquad (9)$$

Записав ту же формулу для $A_{n-1,k-1}(a)$

$$A_{n-1,k-1}^2(a) = A_{n-k,0}^2(a) - \sum_{m=n-k}^{n-2}(P_m^{(k-n)}(a))^2(2m+1) \qquad (10)$$

и вычислив разность (9) и (10), получим

$$A_{n,k}^2(a) = A_{n-1,k-1}^2(a) - (P_{n-1}^{(k-n)}(a))^2(2n-1). \qquad (11)$$

Формула (11) позволяет, используя первообразную полинома Лежандра, последовательно вычислять константы вложения.

3. КОНСТАНТЫ $\Lambda^2_{n,3}$

Преобразуем полученную в [6] для $A^2_{n,2}(a)$ формулу на отрезок [0; 1] и запишем её в переменной t:

$$A^2_{n,2}(t) = \frac{-t^{2n-5}}{((n-2)!)^2(2n-5)} \times$$
$$\times ((n-2)^2 + 4(n-1)(2n-5)t + 4(2n-1)(2n-5)t^2).$$

Так как

$$P^{(3-n)}_{n-1}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^2t^{n-1}}{da^2} =$$
$$= \frac{t^{n-3}}{(n-2)!}(2(2n-3)t + n - 2),$$

то из формулы (11) следует

$$A^2_{n,3} = \frac{-t^{2n-7}}{((n-2)!)^2(2n-7)} \times$$
$$\times (4(2n-1)(2n-3)^2(2n-7)t^3 +$$
$$+ 12(n-1)(n-2)(2n-3)(2n-7)t^2 +$$
$$+ 3(n-2)^2(2n-3)(2n-7)t + (n-2)^2(n-3)^2). \quad (12)$$

Множитель $\frac{1}{((n-2)!)^2(2n-7)}$ не влияет на точки максимума и минимума функции $A^2_{n,3}$.

Для упрощения вычислений введём функцию

$$f_{n,3}(t) := A^2_{n,3} \cdot ((n-2)!)^2(2n-7).$$

Тогда

$$\frac{df_{n,3}}{da} = -t^{2n-8}(2a-1)(2n-7)(n-2) \times$$
$$\times [8(2n-1)(2n-3)^2t^3 + 12(n-1)(2n-3)(2n-5)t^2 +$$
$$+ 6(n-2)(n-3)(2n-3)t + (n-2)^2(n-3)^2].$$

Кубический многочлен, стоящий в квадратных скобках в предыдущей формуле, имеет следующие корни:

$$t_1(n) := -\frac{(n-2)(2n-3) - \sqrt{3(n-2)(2n-3)}}{2(2n-1)(2n-3)},$$
$$t_2(n) := -\frac{(n-2)(2n-3) + \sqrt{3(n-2)(2n-3)}}{2(2n-1)(2n-3)},$$
$$t_3(n) := -\frac{n-2}{2(2n-1)},$$

которые удовлетворяют неравенствам

$$-\frac{1}{4} < t_1(n) < t_3(n) < t_2(n) < 0.$$

Точки $t_1(n)$ и $t_2(n)$ являются точками максимума функции $f_{n,3}$, а $t_3(n)$ — точкой минимума функции $f_{n,3}$.

Чтобы определить точную константу вложения, надо определить, какое из двух значений $f_{n,3}(t_1)$, $f_{n,3}(t_2)$ является максимальным.

Теорема 2. *Функция $f_{n,3}(t)$, а значит и $A_{n,3}(t)$, имеет глобальный максимум в точке t_1 — ближайшей к точке $-\frac{1}{4}$ точке максимума.*

Идея доказательства заключается в том, чтобы показать, что при всех $n \geq 4$ выполнено неравенство

$$\frac{f_{n,3}(t_1)}{f_{n,3}(t_2)} > 1.$$

Значение $A^2_{n,3}(t_1)$ равно

$$\left(\frac{(n-2)(2n-3) + \sqrt{(n-2)(2n-3)}}{(2n-1)(2n-3)}\right)^{2n-7} \times$$
$$\times \frac{(n-2)(3(n-2)(2n-5) - \sqrt{3}(2n-7)\sqrt{(n-2)(2n-3)})}{4^{n-3}((n-2)!)^2(2n-1)^2(2n-7)}. \quad (13)$$

Проверяется непосредственным вычислением.

4. КОНСТАНТЫ $\Lambda^2_{n,5}$

Опираясь на явный вид $A^2_{n,3}$ (12) и используя рекуррентную формулу (11), найдём вид $A^2_{n-1,4}$ на отрезке [0; 1]:

$$A^2_{n-1,4}(t) = -\frac{t^{2n-11}}{((n-4)!)^2(2n-11)} \times$$
$$\times (16(2n-3)(2n-5)^2(2n-11)t^4 +$$
$$+ 32(n-2)(2n-5)(2n-7)(2n-11)t^3 +$$
$$+ 24(n-3)(n-4)(2n-5)(2n-11)t^2 +$$
$$+ 8(n-3)(n-4)^2(2n-11)t + (n-4)^2(n-5)^2).$$

Первообразная порядка $(5-n)$ смещённого полинома Лежандра P_{n-1} равна

$$P^{(5-n)}_{n-1} = \frac{t^{n-5}}{(n-3)!}(4(2n-3)(2n-5)t^2 +$$
$$+ 4(n-3)(2n-5)t + (n-3)(n-4)).$$

Действуя так же, как в разделе 3, применяя формулу (12), найдём

$$A^2_{n,5} = -\frac{t^{2n-11}}{((n-3)!)^2(2n-11)} \times$$
$$\times [16(2n-1)(2n-3)^2(2n-5)^2(2n-11)t^5 +$$
$$+ 80(n-1)(n-3)(2n-3)(2n-5)^2(2n-11)t^4 +$$
$$+ 40(n-2)(n-3)(2n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-11)t^3 +$$
$$+ 40(n-2)(n-3)^2(n-4)(2n-5)(2n-11)t^2 +$$
$$+ 5(n-3)^2(n-4)^2(2n-5)(2n-11)t +$$
$$+ (n-3)^2(n-4)^2(n-5)^2].$$

Введём функцию

$$f_{n,5} := A_{n,5}^2 \cdot ((n-3)!)^2(2n-11)$$

и найдём её производную

$$\frac{df_{n,5}}{da} = -t^{2n-12}(n-3)(2n-11)(2a-1)\times$$
$$\times[32(2n-1)(2n-3)^2(2n-5)^2t^5 +$$
$$+80(n-1)(2n-3)(2n-5)^2(2n-7)t^4 +$$
$$+80(n-2)(n-4)(2n-3)(2n-5)(2n-7)t^3 +$$
$$+40(n-2)(n-3)(n-4)(2n-5)(2n-9)t^2 +$$
$$+10(n-3)(n-4)^2(n-5)(2n-5)t +$$
$$+(n-3)(n-4)^2(n-5)^2]. \quad (14)$$

Многочлен, стоящий в квадратных скобках формулы (14), раскладывается на множители

$$[4(2n-3)(2n-5)t^2 + 4(n-4)(2n-5)t +$$
$$+(n-4)(n-5)]\cdot[8(2n-1)(2n-3)(2n-5)t^3 +$$
$$+12(n-3)(2n-3)(2n-5)t^2 +$$
$$+6(n-3)(n-4)(2n-5)t + (n-3)(n-4)(n-5)]. \quad (15)$$

Обозначим их соответственно

$$g_2(t) := 4(2n-3)(2n-5)t^2 +$$
$$+4(n-4)(2n-5)t + (n-4)(n-5),$$
$$g_3(t) := 8(2n-1)(2n-3)(2n-5)t^3 +$$
$$+12(n-3)(2n-3)(2n-5)t^2 +$$
$$+6(n-3)(n-4)(2n-5)t + (n-3)(n-4)(n-5).$$

Исследуем нули $\dfrac{df_{n,5}}{da}$:

$$g_2(t) = 0 \Leftrightarrow \hat{t}_{1,2} = -\frac{n-4}{2(2n-3)} \pm \frac{\sqrt{5(n-4)(2n-5)}}{2(2n-3)(2n-5)}.$$

Многочлен g_3 имеет три вещественных корня. Используя формулы Кардано, можно получить, что его корни имеют вид

$$t_1 = -\frac{n-3}{2(2n-1)} - \frac{\sqrt{5(n-3)}}{(2n-1)\sqrt{2n-3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{\pi}{3}\right), \quad (16)$$

$$t_2 = -\frac{n-3}{2(2n-1)} - \frac{\sqrt{5(n-3)}}{(2n-1)\sqrt{2n-3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{\pi}{3}\right), \quad (17)$$

$$t_3 = -\frac{n-3}{2(2n-1)} + \frac{\sqrt{5(n-3)}}{(2n-1)\sqrt{2n-3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad (18)$$

где

$$\cos\varphi = \frac{2n-11}{2n-5}\frac{\sqrt{2n-3}}{\sqrt{5(n-3)}}, \quad \sin\varphi = \frac{2n-1}{2n-5}\frac{\sqrt{3(n-4)}}{\sqrt{5(n-3)}}.$$

Точки $\hat{t}_1$ и $\hat{t}_2$ являются точками минимума функции $f_{n,5}$, а t_i, $i = 1, 2, 3$, — точками максимума.

Справедлива

Теорема 3. *Точка t_1 (ближайшая к $-\dfrac{1}{4}$ точка максимума функции $f_{n,5}$) является точкой глобального максимума многочлена $f_{n,5}$, а значит, и функции $A_{n,5}^2$.*

4.1. Точное значение константы вложения $A_{n,5}^2$. Введём обозначение $B := 2\sqrt{5(n-3)}\times \cos\varphi_1 + (n-3)\sqrt{2n-3}$.

Тогда

$$f_{n,5}(t_1) = \frac{1}{2^{2n-11}}\left(\frac{B}{(2n-1)\sqrt{2n-3}}\right)^{2n-11}\times$$
$$\times\left[(n-3)^2(n-4)^2(n-5)^2 + \right.$$
$$+\frac{5(n-3)^2(n-4)^2(2n-5)(2n-11)\cdot B}{2(2n-1)\sqrt{2n-3}} -$$
$$-\frac{10(n-2)(n-3)^2(n-4)(2n-5)(2n-11)\cdot B^2}{(2n-1)^2(2n-3)} +$$
$$+\frac{10(n-2)^2(n-3)(2n-5)(2n-7)(2n-11)\cdot B^3}{(2n-1)^3(2n-3)\sqrt{2n-3}} -$$
$$-\frac{5(n-1)(n-3)(2n-5)^2(2n-11)\cdot B^4}{(2n-1)^4(2n-3)} +$$
$$\left.+\frac{(2n-5)^2\cdot B^5}{2(2n-1)^4\sqrt{2n-3}}\right].$$

Точная константа вложения $\Lambda_{n,5}^2$ соответственно равна

$$\Lambda_{n,5}^2 = \frac{f_{n,5}(t_1)}{((n-3)!)^2(2n-11)}.$$

Теоремы 2 и 3 позволяют выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Величина $A_{n,k}^2$, определённая по переменной a на отрезке $[0; 1]$, по переменной $t \in \left[-\dfrac{1}{4}; 0\right]$ имеет $\left\lceil \dfrac{k+1}{2} \right\rceil$ точек максимума. Глобальный максимум величины $A_{n,k}^2$ (для переменной $t = a^2 - a$) принимается в точке максимума, ближайшей к $-\dfrac{1}{4}$. Для чётных k ближайшей такой точкой является сама точка $-\dfrac{1}{4}$. В переменной $a \in [0; 1]$ этому значению отвечает $a = \dfrac{1}{2}$, а на отрезке $[-1; 1]$ $a = 0$ соответственно.

5. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С КОНСТАНТАМИ ВЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы установим связь констант вложения с некоторым классом спектральных задач и укажем способ быстрого пересчёта точных значений констант вложения, определённых на отрезках $[-1; 1]$ и $[0; 1]$ соответственно.

Зафиксируем на отрезке $[0; 1]$ произвольную точку a и рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(-1)^n y^{(2n)} = \lambda(-1)^k y^{(k)}(a)\delta^{(k)}(x-a), \tag{19}$$

$$y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{20}$$

Правую часть (19) можно также представить в виде $\lambda\langle\delta^{(k)}(x-a), y\rangle\delta^{(k)}(x-a)$.

Операторной моделью для этой задачи служит пучок операторов T_a: $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0; 1] \to \overset{\circ}{W}{}_2^{-n}[0; 1]$, квадратичная форма которого удовлетворяет соотношению

$$\forall y \in W_2^n[0; 1]$$

$$\langle T_a y, y\rangle := \int_0^1 |y^{(n)}(x)|^2 dx - \lambda |y^{(k)}(a)|^2 = 0.$$

Рассмотрим задачу о минимизации собственного значения задачи (19), (20) по параметру a. Из определения пучка T_a следует, что наименьшее собственное значение соответствует пучку $T_{1/2}$ и в точности равно $(\Lambda_{n,k}^2)^{-1}$.

Это наблюдение позволяет легко установить связь между константами вложения $\Lambda_{n,k,[-1;1]}^2$, определёнными на отрезке $[-1; 1]$, и $\Lambda_{n,k,[0;1]}^2$ — константами вложения, определёнными на отрезке $[0; 1]$.

Действительно, сделаем замену переменных $s = 2x - 1$, осуществляющую преобразование отрезка $[0; 1]$ на отрезок $[-1; 1]$. Обозначим $z(s) := y\left(\frac{s+1}{2}\right) = y(x)$, с учётом того что $ds = 2dx$, получим, что квадратичная форма пучка $\tilde{T}_{2a-1}$ на отрезке $[-1; 1]$ удовлетворяет соотношению

$$\forall z \in W_2^n[-1; 1]$$

$$\langle \tilde{T}_{2a-1} z, z\rangle :=$$

$$:= 2^{2n-1}\int_{-1}^1 |z^{(n)}(s)|^2 ds - \lambda \cdot 2^{2k}|z^{(k)}(2a-1)|^2 = 0.$$

Следовательно, если λ есть собственное значение пучка T_a на отрезке $[0; 1]$ с собственной функцией y, то $\frac{\lambda}{2^{2n-2k-1}}$ есть собственное значение пучка $\tilde{T}_{2a-1}$ на отрезке $[-1; 1]$ с собственной функцией z. Отсюда следует, что

$$A_{n,k,[-1;1]}^2(a) = 2^{2n-2k-1} A_{n,k,[0;1]}^2(2a-1).$$

Следовательно,

$$\Lambda_{n,k,[-1;1]}^2 = 2^{2n-2k-1}\Lambda_{n,k,[0;1]}^2.$$

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19–01–00240.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976. 305 с.
2. *Stekloff W.* Probléme de refroidissement d'une barre heterogéne // Ann. fac. sci. Toulouse. Sér. 2. 1901. V. 3. P. 281–313.
3. *Левин В.Я.* О неравенствах. II. Об одном классе интегральных неравенств // Мат. сборник. 1938. Т. 4 (46). № 2. С. 309–324.
4. *Shmidt E.* Über die Ungleichung, welche die Integrale über eine Potenz einer Function und über eine andere Potenz ihrer Ableitung verbindet // Math. Ann. 1940. V. 117. S. 301–326.
5. *Мукосеева Е.В.*, *Назаров А.И.* О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2014. Т. 425. С. 35–45.
6. *Калябин Г.А.* Точные оценки для производных функций из классов Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^r(-1; 1)$ // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 143–149.

PROPERTIES OF EXTREMA OF ESTIMATES FOR MIDDLE DERIVATIVES OF ODD ORDER IN SOBOLEV CLASSES

T. A. Garmanova, I. A. Sheipak

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin April 26, 2019

Received April 30, 2019

The embedding constants for the Sobolev spaces $\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1] \to \overset{\circ}{W}{}_\infty^k[0;1]$, $0 \le k \le n-1$ are considered. The properties of the functions $A_{n,k}(x)$ arising in the inequalities $|f^{(k)}(x)| \le A_{n,k}(x)\|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^n[0;1]}$, are studied. The extremum points of $A_{n;k}$ are calculated for $k = 3, 5$ and all admissible n. The global maximum of these functions is found, and the exact embedding constants are calculated.

Keywords: estimations of middle derivatives, embedding constants, extreme splines, Sobolev spaces.