ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 5, с. 493–495

МАТЕМАТИКА

УДК 519.615

КОНСТРУКТИВНОЕ ОБОБЩЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

Академик РАН Ю. Г. Евтушенко[1,2,3,*], А. А. Третьяков[1,4,5,**]

Поступило 15.04.2019 г.

В работе предлагаются новые достаточные условия оптимальности 2-го порядка для задачи условной оптимизации с равенствами, которые существенно усиливают и дополняют классические и носят конструктивный характер. Например, они устанавливают эквивалентность достаточных условий в задаче оптимальности с ограничениями неравенствами и достаточных условий оптимальности задачи с равенствами при сведении последней к равенствам путём введения искусственных переменных. При использовании классических достаточных условий оптимальности этот факт был неверен, т.е. существующие классические достаточные условия были неполными, поэтому предложенные условия оптимальности дополняют классические и закрывают вопрос об эквивалентности задачи с неравенствами и задачи с равенствами при сведении первой ко второй путём введения искусственных переменных.

Ключевые слова: задача оптимизации, ограничения равества, неравенства, искусственные переменные, достаточные условия, эквивалентность.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524875493-495

Рассматривается задача условной минимизации функции

$$\min \varphi(x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$F(x) = 0_m, \tag{2}$$

где $F = (f_1, \ldots, f_m)$, φ, $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Через x^* обозначим решение этой задачи. Согласно [1, 2, 4], классические условия оптимальности 2-го порядка для задачи (1), (2) формулируются следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* φ, $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $L(x, \lambda) \triangleq \varphi + \langle F(x), \lambda\rangle$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^\top$ *и существуют* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *и* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *такие, что выполнены соотношения*

$$F(x^*) = 0_m, \quad L_x(x^*, \lambda^*) = 0_n, \tag{3}$$

$$\langle L_{xx}(x^*, \lambda^*)h, h\rangle \geq \alpha\|h\|^2, \quad h \in \operatorname{Ker} F_x(x^*), \quad \alpha > 0. \tag{4}$$

Тогда x^* — локальный минимум в задаче (1), (2).

Соотношения (3), (4) называются условиями Куна—Таккера (КТ). Есть задачи, в которых эти условия нарушаются, в них существует такой вектор $h_2 \in \operatorname{Ker} F_x(x^*) \setminus \{0\}$, что

$$\langle L_{xx}(x^*, \lambda^*)h_2, h_2\rangle = 0. \tag{5}$$

Такая ситуация возникает, например, при введении в задаче оптимизации с ограничениями неравенствами искусственных переменных [1–5]. Причём необходимость введения искусственных переменных в задаче оптимизации с ограничениями неравенствами обусловлена объективной причиной — преодолеть существенный недостаток, который принципиально отличает эти два типа задач — с равенствами и неравенствами. А именно в условиях оптимальности для задачи с неравенствами необходимо требовать допустимость исследуемой на экстремум точки в отличие от условий для задачи с равенствами, это приводит либо к появлению включений, либо к вырожденности в системе уравнений КТ. В случае вырождения для преодоления возникающих трудностей вводится следующее обобщение классических условий оптимальности 2-го порядка.

Обозначим $\operatorname{Ker} F_x(x^*) = \mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{R}_2^n \triangleq (\mathbb{R}_1^n)^\perp$. Имеет место следующая

[1] *Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра “Информатика и управление” Российской Академии наук, Москва*

[2] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.*

[3] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*

[4] *System Research Institute, Polish Academy Sciences, Warsaw, Poland*

[5] *Siedlce University, Poland*

*E-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**E-mail: tret@ap.siedlce.pl

Теорема 2 (Необходимые и достаточные условия оптимальности 2-го порядка специального вида). *Пусть* φ, $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$ *и для любого* $h_2 \in \operatorname{Ker} F_x(x^*)$, $(\|h_2\| = 1)$ *такого, что* $L_{xx}(x^*, \lambda^*)[h_2]^2 = 0$ (*или* $L_{xx}(x^*, \lambda^*)h_2 = 0_n$) *выполнены условия*:

1) $\|F_{xx}(x^*)[h_2]^2\| \geq \alpha > 0;$ (6)

2) *существует* $h_1 \in \mathbb{R}_2^n$ *и* $c(h_2) = c_1 > 0$, $\|h_1\| = 1$, *удовлетворяющие соотношению*

$$F_x(x^*)[h_1] + \frac{1}{2}F_{xx}(x^*)[c_1h_2]^2 = 0_m. \tag{7}$$

Тогда (*необходимость*) *если* x^* — *решение* (1), (2), *то существует* λ^* *такое, что*

$$\begin{gathered} L'(x^*, \lambda^*) = 0_{n+m}, \\ L_{xx}(x^*, \lambda^*)[h_1]^2 \geq 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Более того (*достаточность*), *если* $\forall h_1, h_2$, *удовлетворяющих* (6)–(8), *существует такое число* $\beta > 0$, *что*

$$\begin{gathered} L_x(x^*, \lambda^*) = 0_n, \\ L_{xx}(x^*, \lambda^*)[h_1]^2 \geq \beta > 0, \end{gathered} \tag{9}$$

то x^* — *локальный минимум в задаче* (1), (2).

Очевидно, что для остальных $h \in \operatorname{Ker} F_x(x^*)$, для которых не выполнены неравенства (9), подразумевается выполнение (4).

Замечание 1. Элемент h_1 может не принадлежать $\operatorname{Ker} F_x(x^*)$.

При доказательстве данной теоремы используется отображение

$$\Phi_t(x) = x - (F_x(x^*))^{-1}F(x^* + c_1th_1 + t^2h_2 + x),$$

которое является сжимающим в окрестности точки x^*, что позволяет доказать существование допустимой дуги

$$\gamma(t) = x^* + c_1th_1 + t^2h_2 + \omega(t) \in M(x^*), \tag{10}$$

где $\|\omega(t)\| = o(t^2)$. Далее на основе свойства дуги $\gamma(t)$ утверждение теоремы доказывается аналогично традиционным доказательствам такого рода результатов.

Покажем, как применяются данные условия оптимальности к задаче оптимизации (1) с ограничениями неравенствами

$$g_i(z) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Обозначая $x = (z, s)$ и заменяя (1), (11) на задачу

$$\min \varphi(z) \tag{12}$$

при условии

$$F(x) = g(z) + s^2 = 0_m, \tag{13}$$

где $g = (g_1, \ldots, g_m)^\top$, $s^2 = (s_1^2, \ldots, s_m^2)^\top$, получаем, что в решении (z^*, s^*) для $h_2 = (0, \bar{s})^\top \in \operatorname{Ker} F_x(x^*)$ существует $h_1 = (\bar{z}, 0)^\top$ такое, что

$$\begin{gathered} F_x(x^*)[h_1] + \frac{1}{2}F_{xx}(x^*)[h_2]^2 = 0_m \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g'(z^*)\bar{z} + \bar{s}^2 = 0_m. \end{gathered} \tag{14}$$

При этом $L_{xx}(x^*, \lambda^*)[h_2]^2 = 0$ и классические условия оптимальности Лагранжа 2-го порядка не выполнены. Однако условия 1 и 2 теоремы 2 выполнены при $c_1 = 1$. Таким образом, к задаче (12), (13) применима теорема 2. Более того, будет справедлива следующая

Теорема 3 (об эквивалентности условий оптимальности Куна—Таккера и Лагранжа 2-го порядка при введении искусственных переменных). *Пусть* φ, $g \in C^3(\mathbb{R}^n)$. *Если для задачи* (1), (11) *в точке* (x^*, λ^*) *выполнены классические достаточные условия оптимальности Куна—Таккера* 2-*го порядка*, *то для задачи* (12), (13) *выполнены достаточные условия оптимальности Лагранжа* 2-*го порядка* (9), *и наоборот*.

Доказательство данной теоремы достаточно просто и поэтому здесь не приводится.

Источник финансирования. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 17–07–00510).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
2. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983.
3. *Брежнева О.А.*, *Евтушенко Ю.Г.*, *Третьяков А.А.* 2-фактор-метод модифицированных функций Лагранжа для решения вырожденных задач условной оптимизации // ДАН. 2006. Т. 408. № 4. С. 439–442.
4. *Bertsekas D.P.* Nonlinear Programming. Belmont: Athena Scientific, 1999. P. 191–276.
5. *Brezhneva O.A.*, *Tret'yakov A.A.* The *p*-Factor Lagrange Methods for Degenerate Nonlinear Programming // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2007. V. 28. № 9/10. P. 1051–1086.

CONSTRUCTIVE GENERALIZATION OF CLASSICAL SUFFICIENT SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS

Academicaian of the RAS Yu. G. Evtushenko[1,2,3], A. A. Tret'yakov[1,4,5]

[1] *Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*
[3] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[4] *System Research Institite, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*
[5] *Siedlce University, Siedlce, Poland*

Received April 15, 2019

In this paper we consider new sufficient conditions of optimality of the second-order for equality constrained optimization problems, which essentially enhance and complement the classical ones and are constructive. For example they establish equivalence between sufficient conditions in the equality constrained optimization problems and sufficient conditions for optimality in equality constrained problems by reducing the latter to equalities with the help of introducing slack variables. Previously, when using the classical sufficient optimality conditions, this fact was not considered to be true, that is, the existing classical sufficient conditions were not complete, so the proposed optimality conditions complement the classical ones and close the question of the equivalence of the problems with inequalities and the problems with equalities when reducing the first to the second by introducing slack variables.

Keywords: optimization problem, equality constraints, inequities, slack variables, sufficient conditions, equivalence.