ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 5, с. 496–498

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.98

МНОГОМЕРНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

Член-корреспондент РАН **В. Д. Степанов**[1,*], **Г. Э. Шамбилова**[2,**]

Поступило 07.05.2019 г.

В работе дана характеризация n-мерного билинейного неравенства Харди в весовых пространствах Лебега.

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, многомерный оператор Харди, билинейное неравенство.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524875496-498

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}$ — подмножество всех неотрицательных функций. При $v \in \mathfrak{M}^+$ и $0 < p < \infty$ определим весовое пространство Лебега

$$L_v^p := \left\{ f \in \mathfrak{M} \colon \|f\|_{L_v^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p v(x) dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Пусть $0 < q < \infty$, $1 \le p_1, p_2 < \infty$ и $v_1, v_2, u \in \mathfrak{M}^+$. Рассмотрим задачу характеризации билинейного неравенства

$$\|Hf \cdot Hg\|_{L_u^q} \le C\|f\|_{L_{v_1}^{p_1}} \|g\|_{L_{v_2}^{p_2}}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^+, \qquad (1)$$

где константа C не зависит от функций f и g и полагается наименьшей из возможных, а оператор Харди имеет вид

$$Hf(x) := \int_{B(|x|)} f(y) dy, \quad B(|x|) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y| < |x|\}. \quad (2)$$

В одномерном случае данная задача изучалась в [1, 2] как дополнение к некоторым результатам о мультилинейных неравенствах [3, 4].

Билинейные весовые неравенства с операторами Вольтерра $R_i f(x) := \int_0^x k_i(x, y) f(y) dy$ и $R_i^* f(x) := \int_x^\infty k_i(y, x) f(y) dy$, $i = 1, 2$, изучены в [5, 6], причём в случае $1 < q < \min(p_1, p_2)$ результат [5] получен редукционным методом, использующим вспомогательную функцию, а в [6] — прямым методом.

Для операторов Харди—Стеклова этот случай рассмотрен в [7, 8] (см. также [9]).

Аналогичная задача на конусах монотонных функций изучалась в работах [10, 12].

Для характеризации билинейных весовых неравенств будем использовать результаты для весового неравенства Харди с оператором H, определённого в (2), которые содержатся в [13] при $1 < p \le q < \infty$ и $1 < q < p < \infty$. Дополнительно к этому в данной работе по аналогии с [14] рассмотрены случаи $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ и $0 < q < 1$, $p = 1$ (раздел 1).

Основные результаты содержатся в разделе 2.

Всюду в сообщении произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными нулю. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от параметров суммирования; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. Если $p \ne 1$, то $p' := \dfrac{p}{p-1}$.

1. ВЕСОВОЕ НЕРАВЕНСТВО ХАРДИ

Теорема 1. *Пусть* $0 < q < p$, $1 < p < \infty$ *и* $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^p v \right)^{1/p}, \quad f \in \mathfrak{M}^+ \quad (3)$$

выполнено соотношение

$$C \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} v^{1-p'} \right)^{r/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{r/p} u(x) dx \right)^{1/r} =: A.$$

Определение. $\underline{v}(x) := \operatorname*{ess\,inf}_{|t|<|x|} v(t)$, $v \in \mathfrak{M}^+$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < 1$, $p = 1$. *Тогда наилучшая константа* C *в неравенстве*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q u(x) dx \right)^{1/q} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f v \right), \quad f \in \mathfrak{M}^+, \quad (4)$$

не изменится, если v *заменить на* $\underline{v}$.

[1] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровск*

[2] *Российский университет дружбы народов, Москва*

**E-mail: stepanov@mi-ras.ru*

***E-mail: shambilova@mail.ru*

Теорема 3. *Пусть* $0 < q < 1$, $p = 1$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (4) *выполнено соотношение*

$$C \approx \left(\int_{\mathbb{R}^n} \underline{v}^{\frac{q}{q-1}}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{\frac{q}{1-q}} u(x)dx \right)^{\frac{1-q}{q}} =: B.$$

2. БИЛИНЕЙНЫЕ ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассматривается неравенство

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B(|x|)} f \right)^q \left(\int_{B(|x|)} g \right)^q u(x)dx \right)^{1/q} \le$$
$$\le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{p_1} v_1 \right)^{1/p_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{p_2} v_2 \right)^{1/p_2}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^+. \quad (5)$$

Теорема 4. *Пусть* $1 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (5) *выполнено соотношение* $C \approx \mathcal{A}_1$, *где*

$$\mathcal{A}_1 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_1^{1-p_1'} \right)^{1/p_1'} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_2^{1-p_2'} \right)^{1/p_2'} \left(\int_{|x| \ge \alpha} u \right)^{1/q}.$$

Теорема 5. *Пусть* $1 < \min(p_1, p_2) \le q < \max(p_1, p_2) < \infty$ *и* $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (5) *выполнено соотношение* $C \approx \mathcal{A}_2$, *где*:

а) $1 < p_1 \le q < p_2$,

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_1^{1-p_1'} \right)^{1/p_1'} \times$$
$$\times \left(\int_{|y| \ge \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{r_2/p_2} \left(\int_{B(|y|)} v_2^{1-p_2'} \right)^{r_2/p_2'} u(y)dy \right)^{1/r_2};$$

б) $1 < p_2 \le q < p_1$,

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_2^{1-p_2'} \right)^{1/p_2'} \times$$
$$\times \left(\int_{|y| \ge \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{r_1/p_1} \left(\int_{B(|y|)} v_1^{1-p_1'} \right)^{r_1/p_1'} u(y)dy \right)^{1/r_1}.$$

Теорема 6. *Пусть* $0 < q < \min(p_1, p_2) < \infty$, $\min(p_1, p_2) > 1$ *и* $\frac{1}{r_i} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (5) *выполнено соотношение* $C \approx \mathcal{A}_{3.1} + \mathcal{A}_{3.2}$, *где*:

а) $\frac{1}{q} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$\mathcal{A}_{3.1} := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_1^{1-p_1'} \right)^{1/p_1'} \times$$
$$\times \left(\int_{|x| \ge \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{r_2/q} \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p_2'} \right)^{r_2/q'} v_2^{1-p_2'}(x)dx \right)^{1/r_2},$$

$$\mathcal{A}_{3.2} := \sup_{\alpha > 0} \left(\int_{|x| \le \alpha} v_2^{1-p_2'} \right)^{1/p_2'} \times$$
$$\times \left(\int_{|x| \ge \alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} u \right)^{r_1/q} \left(\int_{B(|x|)} v_1^{1-p_1'} \right)^{r_1/q'} v_1^{1-p_1'}(x)dx \right)^{1/r_1};$$

б) $\frac{1}{q} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ и $\frac{1}{s} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$

$$\mathcal{A}_{3.1}^s := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{r_2/q} \times \right.$$
$$\times \left. \int_{B(|y|)} v_2^{1-p_2'} \right)^{r_2/q'} v_2^{1-p_2'}(y)dy^{s/r_2} \times$$
$$\times \left(\int_{B(|y|)} v_1^{1-p_1'} \right)^{\frac{s}{r_2'}} v_1^{1-p_1'}(x)dx,$$

$$\mathcal{A}_{3.2}^s := \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|x|)} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(|y|)} u \right)^{r_1/q} \times \right.$$
$$\times \left(\int_{B(|y|)} v_1^{1-p_1'} \right)^{r_1/q'} v_1^{1-p_1'}(y)dy \right)^{s/r_1} \times$$
$$\times \left(\int_{B(|x|)} v_2^{1-p_2'} \right)^{s/r_1'} v_2^{1-p_2'}(x)dx.$$

Пусть $v_i \in \mathfrak{M}^+$, $i = 1, 2$. Положим

$$\underline{v}_i(x) := \operatorname*{ess\,inf}_{|t| < |x|} v_i(t) = \frac{1}{\operatorname*{ess\,inf}_{|t| < |x|} \frac{1}{v_i(t)}} =: \frac{1}{\overline{v}_i(t)}.$$

Заметим, что $\underline{v}_i(x) = \underline{v}_i(|x|), \overline{v}_i(x) = \overline{v}_i(|x|)$ и для функций $\overline{v}_i(t) := \overline{v}_i(|x|)$, $t = |x|$ на $[0, \infty)$ используются те же обозначения. Без потери общности предположим, что функции $\overline{v}_i(t)$ непрерывны справа. Тогда существует мера Бореля, такая что

$$[\overline{v}_i(t)]^{\frac{q}{1-q}} = \int_{[0,t]} d\varphi_i + [\overline{v}_i(0)]^{\frac{q}{1-q}}.$$

Для простоты предположим, что $\overline{v}_i(0) = \lim_{t \to 0+0} \overline{v}_i(t) = 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 7. *Пусть* $0 < q < 1$, $p_1 = p_2 = 1$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (5) *выполнено соотношение* $C \approx \mathcal{A}_{4.1} + \mathcal{A}_{4.2}$, *где*:

а) $\frac{1}{2} \le q < 1$,

$$\mathcal{A}_{4.1} := \sup_{t>0}\left(\int_{|x|>t}\left(\int_{|y|>|x|} u\right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) \times \right.$$

$$\left.\times\left([\bar{v}_2(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_2(t)]^{\frac{q}{1-q}}\right)dx\right)^{\frac{1-q}{q}} \bar{v}_1(t),$$

$$\mathcal{A}_{4.2} := \sup_{t>0}\left(\int_{|x|>t}\left(\int_{|y|>|x|} u\right)^{\frac{q}{1-q}} u(x) \times \right.$$

$$\left.\times\left([\bar{v}_1(|x|)]^{\frac{q}{1-q}} - [\bar{v}_1(t)]^{\frac{q}{1-q}}\right)dx\right)^{\frac{1-q}{q}} \bar{v}_2(t);$$

б) $0 < q < \frac{1}{2}$, $\psi_i(t) := [\bar{v}_i(t)]^{\frac{q}{1-q}}$, $i = 1, 2$,

$$\mathcal{A}_{4.1}^{\frac{q}{1-2q}} := \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(|x|)}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(|y|)} u\right)^{\frac{q}{1-q}} u(y)dy \times \right.$$

$$\left.\times\left(\psi_2(|y|) - \psi_2(|x|)\right)\right)^{\frac{1-q}{1-2q}} d[\psi_1(|x|)]^{\frac{1-q}{1-2q}},$$

$$\mathcal{A}_{4.2}^{\frac{q}{1-2q}} := \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(|x|)}\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(|y|)} u\right)^{\frac{q}{1-q}} u(y)dy \times \right.$$

$$\left.\times\left(\psi_1(|y|) - \psi_1(|x|)\right)\right)^{\frac{1-q}{1-2q}} d[\psi_2(|x|)]^{\frac{1-q}{1-2q}}.$$

Источники финансирования. Результаты работы авторов частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19–01–00223). Работа второго автора (Г.Э. Шамбилова) частично выполнена в рамках программы “RUDN University Program 5–100”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aguilar Cañestro M.I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C.* // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387. № 1. P. 320–334.
2. *Křepela M.* // Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 2017. V. 60. P. 955–971.
3. *Cwikel M., Kerman R.* // J. Funct. Anal. 1992. V. 106. № 1. P. 130–144.
4. *Grafakos L., Torres R.H.* // J. Funct. Anal. 2001. V. 187. № 1. P. 1–24.
5. *Прохоров Д.В.* // Труды МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.
6. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 4.
7. *Джэйн П., Канджилал С., Степанов В.Д., Ушакова Е.П.* // ДАН. 2018. Т. 483. № 6. С. 602–605.
8. *Jain P., Kanjilal S., Stepanov V.D., Ushakova E.P.* // Math. Notes. 2018. V. 104. № 6. P. 823–832.
9. *Прохоров Д.В., Степанов В.Д., Ушакова Е.П.* Интегральные операторы Харди—Стеклова // Совр. пробл. матем. МИАН. 2016. Т. 22.
10. *Křepela M.* // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50.
11. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 652–656.
12. *Степанов В.Д., Шамбилова Г.Э.* // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 639–658.
13. *Drabek P., Heinig H.P., Kufner A.* // Birkhauser Verlag Basel. 1997. V. 123.
14. *Sinnamon G., Stepanov V.D.* // J. London Math. Soc. 1996. V. 54. P. 89–101.

MULTIDIMENSIONAL BILINEAR HARDY INEQUALITIES

Corresponding Member of the RAS V. D. Stepanov[1], G. E. Shambilova[2]

[1]*Computing Center, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russian Federation*
[2]*Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

Received May 7, 2019

A characterization of n-dimensional bilinear Hardy inequalities in weighted Lebesgue spaces is given.

Keywords: weighted Lebesgues space, multidimensional Hardy operator, bilinear inequality.