

УДК 539.3

ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ В ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧЕ КАПИЦЫ

Академик РАН Н. Ф. Морозов^{1,*}, А. К. Беляев²,
П. Е. Товстик¹, Т. М. Товстик¹, Т. П. Товстик^{2,**}

Поступило 22.05.2019 г.

Рассматриваются устойчивость вертикального положения перевёрнутого маятника под действием вибраций опоры, а также область притяжения этого положения. В дополнение к классической задаче Капицы о гармонических вибрациях опоры исследуются полигармонические и случайные вибрации опоры. Найдено условие устойчивости вертикального положения, и исследована область притяжения этого положения.

Ключевые слова: обобщённая задача Капицы, области притяжения, гармоническое и случайное возбуждение, двухмасштабные разложения.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524875502-506>

1. Введение. Впервые задача об устойчивости вертикального положения перевёрнутого маятника под действием гармонических колебаний опоры была решена в работе А. Стефенсона [1], однако более детальные теоретические и экспериментальные исследования были выполнены П.Л. Капицей [2]. Различные обобщения этой задачи и приближённые методы её решения содержатся в монографиях И.И. Блехмана [3, 4]. В работах авторов [5, 6] исследована устойчивость вертикального положения гибкого стержня со свободным верхним концом и шарнирным или жёстко закреплённым нижним концом под действием гармонических колебаний опоры.

В упомянутых выше работах исследование было ограничено определением уровня вибраций опоры, который обеспечивает устойчивость вертикального положения, а область его притяжения не рассматривалась. Ниже этот вопрос рассмотрен для классической задачи Капицы и её обобщений на случаи вибраций опоры более общего вида.

2. Уравнение движения. В подвижной системе координат движение перевёрнутого математического маятника длины L описывается уравнением

$$\frac{d^2\varphi}{dt_0^2} + n_0 \frac{d\varphi}{dt_0} - \frac{1}{L} \left(g + \frac{d^2 f_0}{dt_0^2} \right) \sin \varphi = 0, \quad (1)$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, g — ускорение свободного падения, n_0 — коэффициент

сопротивления. Функция $f_0(t_0)$ описывает вертикальные колебания опоры. Пусть $f_0(t_0)$ — полигармоническая функция $f_0(t_0) = \sum_{k=1}^N A_k \sin(\omega_{0k} t_0 + \beta_k)$.

Введём среднеквадратичную амплитуду колебаний опоры a_0 , её среднеквадратичную скорость v_0 и характерную частоту колебаний ω_0 по формулам

$$a_0^2 = \langle f_0^2(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2, \quad (2)$$

$$v_0^2 = \langle \dot{f}_0^2(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N A_k^2 \omega_{0k}^2, \quad \omega_0 = \frac{v_0}{a_0},$$

где через $\langle Z(t) \rangle$ обозначен оператор осреднения

$$\langle Z(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Z(t) dt.$$

В безразмерных обозначениях уравнение (1) записывается в виде

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon n \dot{\varphi} - (\varepsilon^2 q + \varepsilon \dot{f}) \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

где $t = \omega_0 t_0$ — безразмерное время (производная по нему обозначена точкой),

$$q = \frac{Lg}{v_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{a_0}{L}, \quad n = \frac{n_0}{L\omega_0},$$

$$f(t) = \frac{f_0(t_0)}{a_0} = \sum_{k=1}^N a_k \sin(\omega_k t + \beta_k),$$

$$a_k = \frac{A_k}{a_0}, \quad \omega_k = \frac{\omega_{0k}}{\omega_0}.$$

Здесь q — параметр нагружения, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр.

Для классической задачи Капицы

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Институт проблем машиноведения

Российской Академии наук, Санкт-Петербург

*E-mail: morozov@nm1016.spb.edu

**E-mail: tovstik_t@mail.ru

$$f(t) = \sqrt{2} \sin(t + \beta).$$

Стабилизация верхнего положения с помощью движения опоры с кусочно-постоянным периодическим ускорением рассмотрена в [7].

3. Асимптотическое приближение. Ищем решение уравнения (3) в виде двухмасштабного разложения [8]:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \tau, \varepsilon) &= \sum_{m=0}^{\infty} (U_m(\tau) + V_m(t, \tau)) \varepsilon^m, \\ \langle V_m(t, \tau) \rangle &= 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \end{aligned} \quad (4)$$

где τ — медленное время, а средние значения функций V_m при фиксированном τ равны нулю. С учётом соотношений

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}$$

после подстановки ряда (4) в уравнение (3) находим последовательно

$$\begin{aligned} V_0(t, \tau) &= 0, \quad V_1(t, \tau) = f(t) \sin(U_0(\tau)), \\ \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2} + H(t, \tau) &= 0, \\ H(t, \tau) &= 2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial t \partial \tau} + n \frac{dU_0}{d\tau} - q \sin U_0 - \\ &\quad - (U_1 + V_1) \ddot{f} \cos U_0. \end{aligned}$$

Условие $\langle H \rangle = 0$ даёт уравнение нулевого приближения

$$\begin{aligned} U_0'' + nU_0' + F(U_0) &= 0, \\ F(U_0) &= (v^2 \cos U_0 - q) \sin U_0, \quad (') = \frac{d(\cdot)}{d\tau}, \\ v^2 = \langle \dot{f}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2 \omega_k^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Из уравнения (5) находим условие устойчивости нулевого решения $q < v^2$. В исходных обозначениях (при $n > 0$) вертикальное положение асимптотически устойчиво, если $v_0^2 > Lg$. В случае гармонического возмущения $f_0(t_0) = A \sin(\omega t_0 + \beta)$ условие устойчивости $A^2 \omega^2 > 2Lg$ совпадает с известным [2].

Для физического маятника все результаты сохраняются, если в качестве длины L взять приведённую длину физического маятника $L = J/(mL_c)$, где J — момент инерции, m — масса, L_c — расстояние от оси вращения до центра тяжести. В частности, для однородного стержня длины L_0 будет $L = 2L_0/3$.

4. Область притяжения вертикального положения маятника. Возьмём начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0 > 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ для уравнения (1)

или (3), соответствующие отклонению неподвижного маятника на угол φ_0 . Для уравнения (5) эти начальные условия в силу соотношения $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$ принимают вид $U_0(0) = \varphi_0$, $U_0'(0) = w = -\dot{f}(0) \sin \varphi_0$. Уравнение (5) при $q < v^2$ на фазовом цилиндре (U_0, U_0') , $U_0 + 2\pi = U_0$ имеет две устойчивые точки покоя $U_0 = 0$ и $U_0 = \pi$ и две неустойчивые точки покоя $U_0 = \pm U_*$ (причём $\cos U_* = q/v^2$), через которые при $n = 0$ проходит сепаратрисса $U_0' = \pm v(\cos U_0 - \cos U_*)$, выделяющая при $|U_0| \leq U_*$ область $V = \{|U_0| \leq U_*, |U_0'| \leq v(\cos U_0 - \cos U_*)\}$ притяжения точки $U_0 = U_0' = 0$. Положение начальной точки (φ_0, w) на фазовом цилиндре определяет сходимость решения к точке $U_0 = U_0' = 0$. Условие $w \neq 0$ означает, что в начальный момент времени маятник получает импульс, зависящий от $\dot{f}(0)$ и существенно влияющий на последующее движение. В связи с тем что величину $\dot{f}(0)$ трудно контролировать, будем рассматривать множество $W(\varphi_0) = \{-w_1 \leq w \leq w_2\}$ возможных значений w . На плоскости параметров (φ_0, q) выделим область G_a , в которой при фиксированном φ_0 сходимость имеет место при всех $w \in W$, область G_p со сходимостью при части w и область G_0 , в которой сходимость не имеет места ни при каком w . Нижняя $g^-(\varphi_0)$ и верхняя $g^+(\varphi_0)$ границы области G_p определяются соотношениями (рис. 1)

$$\begin{aligned} g^-(\varphi_0) &= v^2 \cos \varphi_0 - v f_m \sin \varphi_0, \\ f_m &= \max_t |\dot{f}(t)|, \quad g^+(\varphi_0) = v^2 \cos \varphi_0, \quad \varphi_0 \leq \pi/2. \end{aligned} \quad (6)$$

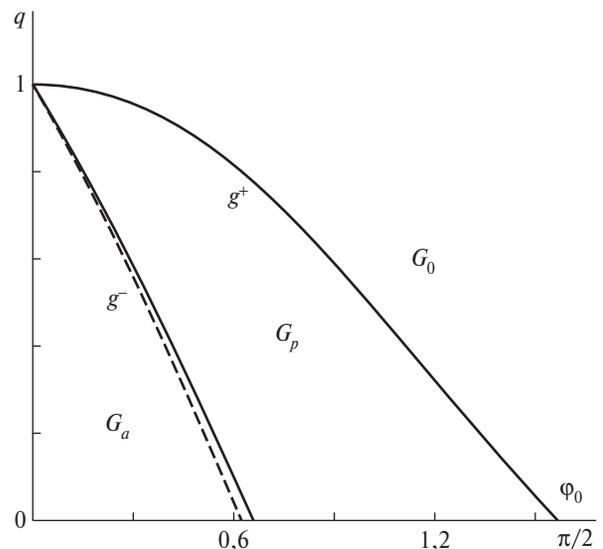


Рис. 1. Области притяжения при гармоническом возмущении.

Граница $g^-(\varphi_0)$ найдена из условия $W(\varphi_0) \subset V$, а $g^+(\varphi_0)$ — из условия $F(\varphi_0) \geq 0$.

В частности, для гармонического возбуждения $f(t) = \sqrt{2} \sin(t + \beta)$ будет

$$v = 1, f_m = \sqrt{2}, g^-(\varphi_0) = \cos \varphi_0 - f_m \sin \varphi_0, \quad (7)$$

$$g^+(\varphi_0) = (1/2) \cos \varphi_0.$$

Следовательно, в силу неравенства $g^-(\varphi_0) \geq 0$ маятник Капицы при достаточно большом уровне вибраций основания независимо от значения начальной фазы β возвращается в вертикальное положение при начальном угле отклонения $\varphi_0 < 0,615 \approx 35^\circ$, при угле $0,615 < \varphi_0 < \pi/2$ маятник возвращается в вертикальное положение лишь при некоторых значениях β , а при других значениях β приближается к естественному положению равновесия $\varphi = \pi$. На рис. 1 показаны области притяжения для маятника Капицы при гармоническом возбуждении, вычисленные при $\varepsilon = 0,01, n = 0,1$. Граница $g^-(\varphi_0)$, найденная при численном интегрировании уравнения (3), показана сплошной линией, а найденная по приближённой формуле (7) — пунктиром. Значения границы $g^+(\varphi_0)$, найденные двумя указанными способами, визуально неразличимы.

Следует сделать два замечания.

Во-первых, границы областей G_a и G_p получены для исчезающе малого сопротивления. При конечном сопротивлении точка на фазовой плоскости, первоначально находящаяся вне области G_a притяжения V , в процессе движения может войти в неё, в результате чего область расширяется вверх. Во-вторых, полученные области притяжения реализуются лишь при малой амплитуде колебаний опоры ($\varepsilon \ll 1$). При отказе от этого предположения движение может не приближаться ни к одной из точек покоя, а иметь характер странного аттрактора.

5. Маятник Капицы при случайном возбуждении. Пусть вертикальные перемещения основания $f_0(t_0) = \xi_0(t_0)$ являются случайными, причём $\xi_0(t_0)$ — нормальный стационарный случайный процесс с нулевым средним и спектральной плотностью $S_{\xi_0}(\lambda_0)$. Рассмотрим те же задачи, что и в пп. 2–4 при случайном возбуждении. В отличие от формул (2) среднеквадратичные амплитуда $a_0 = \sigma_{\xi_0}$ и скорость $v_0 = \sigma_{\dot{\xi}_0}$ колебаний опоры и характерная частота ω_0 вычисляются по формулам

$$\sigma_{\xi_0}^2 = 2 \int_0^\infty S_{\xi_0}(\lambda_0) d\lambda_0, \quad \sigma_{\dot{\xi}_0}^2 = 2 \int_0^\infty \lambda_0^2 S_{\xi_0}(\lambda_0) d\lambda_0, \quad (8)$$

$$\omega_0 = \frac{\sigma_{\dot{\xi}_0}}{\sigma_{\xi_0}}.$$

В безразмерных обозначениях уравнение движения имеет тот же вид (3)

$$\ddot{\varphi} + \varepsilon n \dot{\varphi} - (\varepsilon^2 q + \varepsilon \ddot{\xi}) \sin \varphi = 0, \quad (9)$$

в котором теперь

$$t = \omega_0 t_0, \quad q = \frac{Lg}{\sigma_{\xi_0}^2}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{\xi_0}}{L}, \quad n = \frac{n_0}{\varepsilon \omega_0}, \quad (10)$$

$$\xi(t) = \frac{\xi_0(t_0)}{\sigma_{\xi_0}}, \quad S_\xi(\lambda) = \frac{S_{\xi_0}(\lambda_0/\omega_0)}{\sigma_{\xi_0}^2}.$$

Как и п. 3, асимптотическое разложение ищем в виде (4), в котором математические ожидания флуктуаций $V_m(t, \tau)$ равны нулю, а операция $\langle \rangle$ осреднения по времени заменяется вычислением математического ожидания. Для функции $U_0(\tau)$ в нулевом приближении получаем уравнение

$$U_0'' + nU_0' + (\chi \cos U_0 - q) \sin U_0 = 0, \quad (11)$$

$$\chi \approx -\langle \ddot{\xi}(t) \xi(t) \rangle \approx \sigma_{\ddot{\xi}}^2,$$

и начальные условия $U_0(0) = \varphi_0, U_0'(0) = -\dot{\xi}(0) \sin \varphi_0$. Полагая $\chi = \sigma_{\ddot{\xi}}^2$, получаем условие устойчивости нулевого решения $\sigma_{\ddot{\xi}}^2 > q$ или в исходных обозначениях $\sigma_{\ddot{\xi}_0}^2 > Lg$. При построении областей притяжения можно воспользоваться формулами (6), полагая в них $v^2 = \sigma_{\ddot{\xi}_0}^2, f_m = \max|\dot{\xi}(0)| \approx 2\sigma_{\dot{\xi}}$ (неравенство $|\dot{\xi}(0)| \leq 2\sigma_{\dot{\xi}}$ выполняется с вероятностью 0,95).

6. Численное моделирование. Стационарный процесс $\xi(t)$ моделируем суммой гармонических слагаемых со случайными амплитудами [9]:

$$\xi_N(t) = \sum_{n=1}^N p_n (\eta_n \cos(\hat{\lambda}_n t) + \zeta_n \sin(\hat{\lambda}_n t)), \quad (12)$$

$$p_n = \sqrt{2S_\xi(\hat{\lambda}_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1})}, \quad \hat{\lambda}_n = (\lambda_n + \lambda_{n-1})/2,$$

где η_n и ζ_n — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым средним и единичной дисперсией. При $\max(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \rightarrow 0$ процесс $\xi_N(t)$ сходится к $\xi(t)$ в среднеквадратичном смысле.

Будем численно интегрировать уравнение (9) с $\xi(t) = \xi_N(t)$ и с начальными условиями $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$ и находить предельное значение $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Оказалось, что в отличие от детерминиро-

ванного возмущения (см. пп. 3 и 4) результаты области притяжения существенно отличаются от предсказанных формулами (6). Поэтому рассмотрим уравнение (11) подробнее. Случайная величина χ после осреднения по времени равна

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n^2 p_n^2 (\eta_n^2 + \zeta_n^2). \text{ Её математическое ожидание}$$

$$E(\chi) = \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n^2 p_n^2 \approx 2 \int_0^\infty \lambda^2 S_\xi(\lambda) d\lambda = \sigma_\xi^2. \text{ По центральной}$$

пределной теореме [10] величина χ распределена асимптотически нормально с дисперсией

$$\sigma_\chi^2 = 2 \sum_{n=1}^N \hat{\lambda}_n^4 p_n^4 \rightarrow 0 \text{ при } \max(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \rightarrow 0, \text{ однако}$$

при конечном N величина σ_χ даёт заметный вклад. Запишем с вероятностью 0,95 оценки случайных величин, входящих в границы областей притяжения:

$$\begin{aligned} \sigma_\xi^2 - 2\sigma_\chi \leq \chi = v^2 \leq \sigma_\xi^2 + 2\sigma_\chi, \\ f_m = \max|\dot{\xi}(t)| = 2\sigma_\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Беря теперь нижние и верхние границы этих величин, по формулам (6) находим

$$\begin{aligned} g^-(\varphi_0) &= (\sigma_\xi^2 - 2\sigma_\chi) \cos \varphi_0 - 2\sigma_\xi \sqrt{\sigma_\xi^2 - 2\sigma_\chi} \sin \varphi_0, \\ g^+(\varphi_0) &= (\sigma_\xi^2 + 2\sigma_\chi) \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим дважды дифференцируемый процесс со спектральной плотностью

$$S_\xi(\lambda) = \frac{c_0}{(\lambda^4 + 2(\alpha^2 - 1)\lambda^2 + (\alpha^2 + 1)^2)(\lambda^2 + 1)}, \quad (15)$$

$c_0 = 0,231, \quad \alpha = 0,2,$

где α — параметр узкополосности, константа c_0 находится из условия $2 \int_0^\infty S_\xi(\lambda) d\lambda = 1$. По формулам (8),

(10) находим $\sigma_\xi^2 = 0,743$, и условие устойчивости принимает вид $q < 0,743$.

Для численного моделирования возьмём $N = 200$, тогда $\sigma_\chi = 0,157$. Величина σ_χ — это мера статистической погрешности при моделировании величины χ . В результате меняется условие устойчивости $q < \sigma_\xi^2 - 2\sigma_\chi = 0,429$ (с вероятностью 0,95). На рис. 2 приведён график спектральной плотности (15) и показаны области притяжения, построенные при различных предположениях. Будем указывать границы области G_p , ибо области G_a и G_0 лежат соответственно ниже и выше. Теоретическая область G_p лежит между кривыми g^- и g^+ (жирные линии), построенными по формулам (15) при $\sigma_\chi = 0$. Область

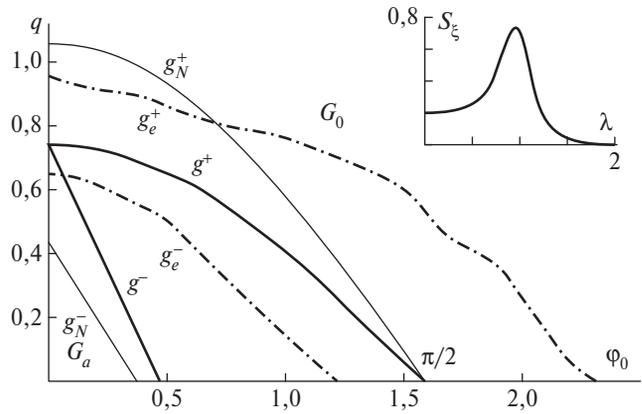


Рис. 2. Области притяжения при случайном возбуждении.

G_p^N , соответствующая моделированию по формулам (13), лежит между кривыми g_N^- и g_N^+ (тонкие линии), построенными по формулам (15) при $\sigma_\chi \neq 0$, причём $G_p \subset G_p^N$. Область G_p^e между кривыми g_e^- и g_e^+ (пунктир) построена на основании результатов численного интегрирования уравнения (9) при $n = 1$ со случайным возбуждением по формуле (13). Области G_p и G_p^N построены при исчезающе малом сопротивлении, а область G_p^e построена при $n = 1$, с чем связано смещение этой области по отношению к G_p^N .

7. Обсуждение. Для всех рассмотренных выше колебаний опоры (гармонических, полигармонических и случайных) получена граница области устойчивости вертикального положения маятника $q < v^2$, которую можно записать в виде $T > \Pi$, где $T = mv_0^2/2$ — средняя энергия вертикальных колебаний, $\Pi = mgL$ — потенциальная энергия.

Область притяжения устойчивого вертикального положения обладает особенностью, связанной с тем, что предельное движение маятника зависит от начальной фазы возмущения, а для случайного возмущения зависит ещё и от реализации случайного процесса. В результате плоскость параметров (φ_0, q) состоит из трёх частей. В двух крайних с ростом времени движение приближается к одному из вертикальных положений $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ независимо от начальной фазы (и реализации случайного возмущения). В промежуточном положении в зависимости от начальной фазы (и реализации) возможно то или иное предельное состояние. Разумеется, область притяжения, в которой движение стремится к положению $\varphi = 0$ независимо от начальной фазы (и реализации), представляет наибольший интерес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stephenson A.* // *Phil. Mag.* 1908. V. 15. P. 233–236.
2. *Капица П.Л.* // *Усп. физ. наук.* 1951. Т. 44. № 1. С. 7–20.
3. *Блехман И.И.* *Вибрационная механика.* М.: Наука, 1994.
4. *Блехман И.И.* *Теория вибрационных процессов и устройств.* СПб.: ИД “Руда и металлы”, 2013.
5. *Морозов Н.Ф., Беляев А.К., Товстик П.Е., Товстик Т.П.* // *ДАН.* 2018. Т. 482. № 2. С. 155–159.
6. *Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.* // *Vestnik SPb Univ. Mathematics. Mechanics.* Astronomy. М.: Pleades Publ., Ltd., 2018. V. 51 (3). P. 296–304.
7. *Леонов Г.А., Шумафов М.М.* *Методы стабилизации линейных управляемых систем.* СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2005.
8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука, 1969.
9. *Пугачев В.С.* *Теория случайных функций.* М.: Физматлит, 1960.
10. *Гнеденко Б.В.* *Курс теории вероятностей.* М.: Физматлит, 1961.

ATTRACTION BASINS IN THE GENERALIZED KAPITSA'S PROBLEM

Academician of the RAS **N. F. Morozov¹, A. K. Belyaev²,
P. E. Tovstik¹, T. M. Tovstik¹, T. P. Tovstik²**

¹*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

²*Institute of Problems in Mechanical Engineering of Russian Academy of Sciences,
Saint-Petersburg, Russian Federation*

Received May 22, 2019

Stability of vertical position of an inverted pendulum under action of support vibration as well as the attraction basin of this position is considered. In addition to the classic Kapitza problem for the harmonic vibration of support, the poly-harmonic and random vibration of support is investigated. The condition of stability of vertical position is determined and the attraction basin of this stable position is studied.

Keywords: generalized Kapitza problem, attraction basin, harmonic and random excitation, two-scale expansion.